Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 11

Hinweis zu Aufgabe 41

(a) Angenommen $M \subsetneq \mathbb{Q}$ ist eine maximale additive Untergruppe von $\mathbb{Q}$. Zunächst zeigen wir, dass $1 \in M$ gilt. Dazu betrachte $I := M \cap \mathbb{Z}$. Dies ist ein Ideal, daher gibt es $u \in \mathbb{Z}$ mit $M \cap \mathbb{Z} = (u)$. Wäre $1 \notin M$, so wäre $u \notin \{-1, 1\}$. Weiter gilt $\frac{1}{u} \notin M$. Dann ist

$$U := \left\{ x + \frac{a}{u} \,\middle|\, x \in M, a \in \mathbb{Z} \right\}$$

eine Untergruppe mit $M \subsetneq U \subseteq \mathbb{Q}$ und daher $U = \mathbb{Q}$. Also gibt es $x \in M$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{1}{u^2} = x + \frac{a}{u}$$

Multiplikation mit u^2 liefert $1 = xu^2 + au$. Wegen $u \in M$ folgt $1 \in M \cap \mathbb{Z}$. Also kann man annehmen, dass $\mathbb{Z} \subseteq M$ gilt. Wegen $M \neq \mathbb{Q}$, gibt es ein $b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ mit $\frac{1}{b} \notin M$. Sei

$$N = \left\{ x + \frac{a}{b} \,\middle|\, x \in M, a \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Dann ist $N \subseteq \mathbb{Q}$ eine Untergruppe und $M \subsetneq N$. Also gilt $N = \mathbb{Q}$. Insbesondere ist $\frac{1}{b^2} \in N$. Also gibt es $x \in M$ und $a \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{1}{b^2} = x + \frac{a}{b}.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit b, so folgt

$$\frac{1}{b} = bx + a \in M.$$

Dies ist ein Widerspruch.

(b) Sei $M = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$. Dann ist M eine Untergruppe von $\mathbb{Q}^*$. Weiter ist M maximal. Angenommen es gibt $M \subsetneq N \subsetneq \mathbb{Q}^*$. Dann enthält M ein negatives Element und daher -1. Es folgt, dass $\mathbb{Q}^* = M \cup (-M) \subseteq N$. Also ist $N = \mathbb{Q}^*$.

Hinweis zu Aufgabe 42

Zunächst beachte man, dass

$$I = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\, a_0 = a_1 = 0 \right\}$$

ist. Insbesondere gilt $R \neq (t)$, da der Ausdruck (t) in R etwas anderes bedeutet als in $\mathbb{Q}[t]$. Sei nun $I \subsetneq J \subsetneq R$ ein maximales Ideal. Wir betrachten die Menge

$$J_0 = \left\{ a_1 \in \mathbb{Q} \,\middle|\, \exists\, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{Q}\colon \quad \sum_{i=1}^{k} a_i t^i \in J \right\}.$$

Dann ist J_0 sicherlich eine Untergruppe von $(\mathbb{Q}, +)$. Sei M_0 eine Gruppe mit $J_0 \subsetneq M_0 \subsetneq \mathbb{Q}$. Nach Aufgabe 41 existiert eine solche. Betrachte das Ideal

$$M = (M_0) + I = \left\{ \sum_{i=0}^{k} a_i t^i \,\middle|\, k \in \mathbb{N},\, a_0 = 0, a_1 \in M_0 \right\}.$$

Offenbar ist $J \subsetneq M \subsetneq R$, was zeigt, dass J kein maximales Ideal gewesen sein kann. Widerspruch.

Hinweis zu Aufgabe 43

(a) Jedes Ideal in R is von einem Element erzeugt. Dies werden wir im folgenden beweisen. Sei $I \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ein Ideal. Wir nehmen an, dass es $(a, b) \in I$ gibt, mit $a \neq 0 \neq b$. Ansonsten ist $I = (0)$, oder $I \subseteq \mathbb{Z}$ und wir sind fertig. Setze

$$\begin{aligned} a &= \min\{x \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \mid \exists\, y \in \mathbb{Z}\colon \quad (x, y) \in I\} \\ b &= \min\{y \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\} \mid \exists\, x \in \mathbb{Z}\colon \quad (x, y) \in I\}. \end{aligned}$$

Zunächst beobachtet man, dass $(a, b) \in I$ gilt. Denn es gibt $(a, y), (x, b) \in I$. Dann ist

$$(a, b) = (1, 0)(a, y) + (0, 1)(x, b).$$

Sei nun $(x_1, x_2) \in I$. Dann gibt es $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ mit $0 \leq r_1 < a$ und $0 \leq r_2 < b$ mit $x_1 = aq_1 + r_1$ und $y_1 = bq_2 + r_2$. Also ist

$$(x_1, x_2) = (q_1, q_2)(a, b) + (r_1, r_2).$$

Wegen $(x_1, x_2), (a, b) \in I$ folgt $(r_1, r_2) \in I$. Aufgrund der Minimalität von a, b folgt $r_1 = r_2 = 0$ und daher $(x_1, x_2) = (q_1, q_2)(a, b)$. Also wird I von (a, b) erzeugt.

(b) Der Ring R ist jedoch kein Hauptidealring, da ein Hauptidealring nach Definition nullteilerfrei ist. Es gilt jedoch

$$(1, 0)(0, 1) = (0, 0) = 0 \in R,$$

was zeigt, dass R kein Integritätsring ist.

Hinweis zu Aufgabe 44

Angenommen es gibt ein Element $a \in R \smallsetminus (R^* \cup \{0\})$, das keine Zerlegung in irreduzible Elemente zulässt (wir nennen dies *endlich zerlegbar*. Insbesondere ist dann a selbst nicht irreduzibel, lässt sich also als ein Produkt zweier Nichteinheiten schreiben. Es gilt $a = a_1 a_1'$. Da a nicht endlich zerlegbar ist, muss einer der beiden Faktoren nicht endlich zerlegbar sein. Wir nehmen an, dass dies für a_1 zutrifft. Dann ist a_1 reduzibel und wir erhalten $a_1 = a_2 a_2'$. Wir iterieren dieses Verfahren und erhalten eine unendliche Folge von nicht assoziierten Elementen

$$a_1, a_2, \dots$$

mit $a_{i+1} \mid a_i$. Es gibt also eine aufsteigende Kette von Hauptidealen

$$(a_1) \subsetneq (a_2) \subsetneq (a_3) \subsetneq \dots$$

Wir definieren

$$I := \bigcup_{i \geq 1} (a_i).$$

Dann ist I ein Ideal. Nach Voraussetzung gibt es $b_1, \ldots, b_n \in R$ mit $I = (b_1, \ldots, b_n)$. Dann muss es einen Index k geben mit

$$b_1, \ldots, b_n \in (a_k).$$

Dann aber ist

$$I = (b_1, \ldots, b_n) \subseteq (a_k) \subsetneq (a_{k+1}) \subseteq I.$$

Dies ist ein Widerspruch.