Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 2

Hinweis zu Aufgabe 5

Wir setzen $B := A^tA$ und definieren $\langle x, y\rangle := x^tBy$. Wir behaupten, dies ist ein Skalarprodukt. Wäre dies der Fall, so wäre $B_{ij} = e_iBe_j = \langle e_i, e_j\rangle$ und B in der Tat die Matrix von $\langle -, -\rangle$. Wir zeigen nun, dass $\langle -, -\rangle$ ein Skalarprodukt ist. Seien dazu $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Zunächst bemerken wir $x^tBy \in \mathbb{R}$ und daher $(x^tBy)^t = (x^tBy)$. Es folgt

$$x^tA^tAy = (x^tA^tAy)^t = y^tA^t(A^t)^t(x^t)^t = y^tA^tAx,$$

woraus $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$ folgt. Sicherlich gilt auch $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$ und $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda \langle x, y\rangle$, da die Multiplikation von Matrizen bilinear ist. Bleibt also nur noch die die positiv-Definitheit zu zeigen. In der Tat ist $x^tA^tAx = (Ax)^t(Ax) = \|Ax\|^2$. Ist $x \neq 0$, so ist wegen $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ auch $Ax \neq 0$ und somit $\|Ax\|^2 > 0$.

Hinweis zu Aufgabe 6

Sei A eine obere Dreiecksmatrix mit $AA^t = I_n$. Wir müssen zeigen, dass $A^{-1} = A$ ist. Wegen $AA^t = I_n$, ist also $A = A^t$ zu zeigen. Dies ist bei einer oberen Dreiecksmatrix genau dann der Fall, wenn sie eine Diagonalmatrix ist. Nehmen wir im Widerspruch an, A ist keine Diagonalmatrix. Dann gibt es einen Eintrag a^i_j von A mit $i < j$ und $a^i_j \neq 0$. Sei $i < n$ maximal mit dieser Eigenschaft. Wir betrachten dann den Eintrag b^i_j der Matrix AA^t. Es ist

$$0 = \delta^i_j = \sum_{k=1}^{n} a^i_k a^j_k = a^i_j a^j_j,$$

dabei gilt das letzte Gleichheitszeichen aufgrund der maximalen Wahl von i. Da $a^i_j \neq 0$ ist, muss $a^j_j = 0$ sein. Dies steht im Widerspruch zur Invertierbarkeit von A. Also ist A diagonal und somit $A^t = A$. Als Gegenbeispiel dient die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $C^tC = C^2 = I_3$. Aber C ist offenbar keine obere Dreiecksmatrix.

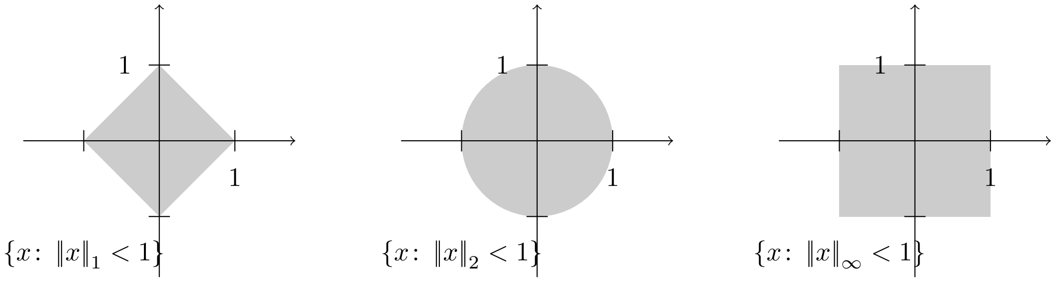
Hinweis zu Aufgabe 7

Wir setzen $e := (1, 1, \ldots, 1)^t$ und $c := n$. Sei $y := (|x^1|, \ldots, |x^n|)$. Dann gilt nach Cauchy–Schwarz–Ungleichung

$$\|x\|_1 = \langle e, y\rangle \leq |\langle e, y\rangle| \leq \|e\|_2 \|y\|_2 = \sqrt{n}\,\|x\|_2\,.$$

Wegen $n \geq \sqrt{n}$ folgt $\frac{1}{n}\|x\|_1 \leq \|x\|_2$. Weiter gilt

$$\|x\|_2 \leq \sqrt{n\left(\max_{i=1,\dots,n}|x^i|\right)^2} = \sqrt{n}\max_{i=1,\dots,n}|x^i| \leq n\max_{i=1,\dots,n}|x^i| \leq n(|x^1|+\cdots+|x^n|) \leq n\|x\|_1 .$$



Hinweis zu Aufgabe 8

(a) Setze $\lambda_i := \langle x, x_i\rangle$ für $i = 1, \dots, n$ und definiere $u := x - \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$. Offensichtlich gilt dann $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u$. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\langle x_j, u\rangle &= \left\langle x_j, x - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle x_i\right\rangle\\ &= \langle x_j, x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x_j, \langle x, x_i\rangle x_i\rangle\\ &= \langle x_j, x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle \langle x_j, x_i\rangle\\ &= \langle x_j, x\rangle - \sum_{i=1}^n \langle x, x_i\rangle \delta_i^j\\ &= \langle x_j, x\rangle - \langle x, x_j\rangle\\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Wie in Teil(a) schreiben wir $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i + u$ mit $\langle x_i, u\rangle = 0$ für $i \in \{1, \dots, n\}$. Der Einfachheit setzen wir $x_{n+1} := u$ und $\lambda_{n+1} = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \langle x, x\rangle\\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i, \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j x_j\right\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_i\lambda_j \langle x_i, x_j\rangle\\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i\lambda_j \delta_i^j + \langle u, u\rangle\\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 + \langle u, u\rangle .\end{aligned}$$

Auf der anderen Seite ist

$$\langle x, x_i\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^n \lambda_j x_j + u, x_i\right\rangle = \lambda_i.$$

Wegen $\langle u,u\rangle = \|u\|^2 \geq 0$ folgert man

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 + \langle u,u\rangle \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle x,x_i\rangle^2 .$$