Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 3

Hinweis zu Aufgabe 9

Sei $(c^*)^i = \sum_{j=1}^n \mu^i_j (b^*)^j$. Dann ist

$$(c^*)^i(b_k) = \sum_{j=1}^n \mu^i_j (b^*)^j(b_k) = \sum_{j=1}^n \mu^i_j \delta^j_k = \mu^i_k$$

Anderseits ist aber

$$\begin{aligned}(c^*)^i(b_k) &= (c^*)^i(\sum_{j=1}^n \lambda^j_k c_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda^j_k (c^*)^i(c_j) \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda^j_k \delta^i_j \\ &= \lambda^i_k.\end{aligned}$$

Dies zeigt $(c^*)^i = \sum_{j=1}^n \mu^i_j (b^*)^j = \sum_{j=1}^n \lambda^i_j (b^*)^j$. Wegen $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$ folgt nach Lemma 1.2.4

$$M(\mathrm{id}_{V^*})^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*} = M((\mathrm{id}_V)^*)^{\mathcal{B}^*}_{\mathcal{C}^*} = M(\mathrm{id}_V)^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \left(M(\mathrm{id}_V)^{\mathcal{B}}_{\mathcal{C}}\right)^{-1}$$

Dabei ist zu beachten das die Basiswechselmatrizen auf dem Dualraum von rechts operieren. Andernfalls muss man das Ergebnis noch transponieren.

Hinweis zu Aufgabe 10

(a) Angenommen es gäbe $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $|a^i_j| > 1$. Sei $v = Ae_j = (a^1_j, \ldots, a^n_j)$. Wegen $|a^i_j| > 1$ folgt $\|v\| > 1 = \|e_j\|$, ein Widerspruch.

(b) Wir identifizieren $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathbb{R}^{(n^2)}$ und versehen diesen Raum mit der euklidischen Norm. Wegen Teil (a), ist die Quadratsumme über alle Einträge einer Matrix $A \in O(n)$ höchstens n^2. Dies zeigt, dass $O(n)$ beschränkt ist. Um die Abgeschlossenheit zu zeigen, betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned}T\colon \mathbb{R}^{n\times n} &\longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n} \\ A &\longmapsto AA^t - I_n\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist stetig. Es ist $O(n) = T^{-1}(\{0\})$. Da einpunktige Mengen in $\mathbb{R}^{n\times n}$ abgeschlossen sind ist auch $O(n)$ als Urbild einer abgeschlossener Menge unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen.

Hinweis zu Aufgabe 11

Wir wenden das Gram–Schmidt–Verfahren an, normalisieren die Vektoren jedoch erst ganz am Schluss. Sei $w_1, \ldots, w_3$ eine Basis mit $\langle w_i, w_j \rangle = \|w_i\| \, \delta_i^j$. Wir berechnen w_i induktiv durch

$$w_n = t^n - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\langle t^n, w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j, \quad n = 0, 1, 2.$$

Demnach ist $w_0 = 1$ mit $\|1\| = 1$. Weiter ist

$$w_1 = t - \int_0^1 1 \cdot t \, dt = t - \frac{1}{2}$$

und $\left\|t - \frac{1}{2}\right\|^2 = \frac{1}{12}$. Wir bestimmen weiter

$$w_2 = t^2 - 12t \int_0^1 t^2(t - \frac{1}{2}) \, dt - \int_0^1 t^2 \cdot 1 \, dt = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

Dabei gilt $\left\|t^2 - t + \frac{1}{6}\right\| = \frac{1}{180}$. Nach Normierung ergibt sich also $v_0 = 1$, $v_1 = \sqrt{3}(2t - 1)$, $v_3 = 6\sqrt{5}(t^2 - t + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$.

Hinweis zu Aufgabe 12

(a) Die Linearität von r_v zu zeigen ist Routine. Sei $x \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r_v(r_v(x)) &= r_v(x - 2\langle x, v \rangle v) \\ &= x - 2\langle x, v \rangle v - 2\langle x - 2\langle x, v \rangle v, v \rangle v \\ &= x - 2\langle x, v \rangle v - 2\langle x, v \rangle v + 4\langle x, v \rangle \underbrace{\langle v, v \rangle}_{=1} v \\ &= x. \end{aligned}$$

(b) Seien $x, y \in V$ Dann ist

$$\begin{aligned} \langle r_v(x), r_v(y) \rangle &= \langle x - 2\langle x, v \rangle v, y - 2\langle y, v \rangle v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle - 2\langle x, v \rangle \langle v, y \rangle - 2\langle y, v \rangle \langle x, v \rangle + 4\langle x, v \rangle \langle y, v \rangle \langle v, v \rangle \\ &= \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Dies zeigt Orthogonalität von r_v.

(c) Sei U das orthogonales Komplement von $W = \mathrm{span}(v)$. Es ist $V = U \oplus W$. Ist $u \in U$, so ist $r_v(u) = u$. Also ist $U \subseteq \mathrm{Eig}(r_v; 1)$. Ist $w \in W$, so ist $w = \lambda v$ und somit $r_v(\lambda v) = \lambda v - 2\lambda \langle v, v \rangle v = -\lambda v$. Also ist $W \subseteq \mathrm{Eig}(r_v; -1)$. Dies zeigt, dass r_v diagonalisierbar ist. Dabei kommt der Eigenwert 1 mit Vielfachheit $\dim U = \dim V - 1$ und der Eigenwert -1 mit Vielfachheit 1 vor. Da die Determinante von r_v gerade das Produkt aller Eigenwerte von r_v ist, folgt $\det(r_v) = -1$