Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 4

Hinweis zu Aufgabe 13

(a) Sei $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\overline{(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)} = \overline{(a_1+a_2)+i(b_1+b_2)} = a_1+a_2-i(b_1+b_2) = a_1-ib_1+a_2-ib_2 = \overline{a_1+ib_1}+\overline{a_2+ib_2}$. Weiter folgt $\overline{(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)} = \overline{a_1a_2-b_1b_2+i(a_1b_2+a_2b_1)} = a_1a_2-b_1b_2-i(a_1b_2+a_2b_1) = (a_1-ib_1)(a_2-ib_2) = \overline{(a_1+ib_1)}\cdot\overline{(a_2+ib_2)}$. Ist $\lambda \in \mathbb{R}$, so gilt $\overline{\lambda}=\lambda$ und daher $\overline{\lambda(a_1+ib_2)} = \overline{\lambda}\cdot\overline{(a_1+ib_1)} = \lambda\overline{(a_1+ib_1)}$, woraus die $\mathbb{R}$–Linearität folgt.

(b) Sei $\deg(f)=n$. Wir verfahren nach Induktion. Ist $\deg(f)=1$, so hat f die Form $f(t)=at+b=a(t+\frac{b}{a})$, was der gewünschten Form enstpricht. Nehmen wir nun an, die Aussage gilt für alle Polynome vom Grad $\leq n-1$. Aufgrund des Hinweises können wir annehmen, dass ein $\alpha_n \in \mathbb{C}$ existiert mit $f(\alpha_n)=0$. Nun verwenden wir Polynomdivision (vgl. LinA I). Es existiert also ein $g \in \mathbb{C}[t]$ mit $\deg(g)=n-1$ und $f=g(t)(t-\alpha_n)$. Nach Induktionsannahme existieren $\alpha_0,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ mit

$$g(t) = \alpha_0 \prod_{i=1}^{n-1}(t-\alpha_i).$$

Somit folgt die Aussage.

(c) Sei $f \in \mathbb{R}[t]$. Wegen $\mathbb{R}[t] \subseteq \mathbb{C}[t]$ können wir Teil (b) auf f anwenden. Es gibt also $\alpha_0,\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}$ mit $f=\alpha_0(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_n)$. Offensichtlich ist $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, da dies der Leitkoeffizient des Polynoms ist. Nach Umsortierung können wir annehmen, dass $\alpha_0,\dots,\alpha_k \in \mathbb{R}$ gilt und $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ ist. Nach Teil (a) gilt $\overline{f(u)} = f(\overline{u})$ für alle $u \in \mathbb{C}$. Insbesondere folgt aus $f(u)=0$ auch $f(\overline{u})=0$. Dies heißt, dass die Nullstellen $\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n$ in Paaren von komplex konjugierten Nullstellen auftreten. Wir können also nach Umsortierung annehmen, dass

$$(\alpha_{k+1},\dots,\alpha_n) = (\beta_1,\overline{\beta}_1,\dots,\beta_l,\overline{\beta}_l).$$

Setze $\beta_j = a_j+ib_j$. Dann ist

$$(t-\beta_j)(t-\overline{\beta_j}) = t^2-2a_j+a_j^2+b_j^2 \in \mathbb{R}[t].$$

Daher folgt

$$f = \alpha_0(t-\alpha_1)\cdots(t-\alpha_k)(t^2-2a_1+a_1^2+b_1^2)\cdots(t^2-2a_l+a_l^2+b_l^2),$$

womit die Behauptung folgt.

(d) Ist $f=v_1^2+\cdots+v_r^2$ und $g=u_1^2+\cdots+u_s^2$ für $u_i,v_j \in \mathbb{R}[t]$, so ist fg auch eine Summe von Quadraten nämlich $fg=\sum_{i=1}^r\sum_{j=1}^s(v_iu_j)^2$. Es genügt also zu zeigen, dass sich jeder Faktor von f in der Zerlegung aus Teil (c) als Summe von Quadraten schreiben lässt. Wir verwenden die Zerlegung wie beim Beweis von (c). Wegen $f(x)\geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt direkt

$\alpha_0 \geq 0$, also $\alpha_0 = (\sqrt{\alpha_0})^2$, also ist α_0 ein Quadrat. Tritt der Term $(t - \alpha_j)$ für $\alpha_j \in \mathbb{R}$ in der Zerlegung von f auf, so muss eines der übrigen α_i mit $1 \leq i \leq k$, $i \neq j$ mit α_j übereinstimmen, da ansonsten f an der Stelle α_j einen Vorzeichenwechsel hätte. Also tritt der Faktor $(t - \alpha_j)^2$ auf, der offensichtlich eine Summe von Quadraten ist. Schließlich betrachtet man die Faktoren der Form $t^2 - 2a + a^2 + b^2 = (t-a)^2 + b^2$, die offensichtlich eine Summe von zwei Quadraten sind.

Hinweis zu Aufgabe 14

(a) Routine

(b) Zunächst macht man sich klar, dass für alle x die Abbildung $\Theta(b)(x) = b(x, -)$ tatsächlich in V^* liegt. Dies folgt sofort aus der Linearität von b im zweiten Argument. Aus der Bilinearität von b im ersten Argument folgt, dass $\Theta(b)$ tatsächlich in $\mathrm{Hom}(V, V^*)$ liegt. Wir zeigen, dass Θ selbst ebenfalls $\mathbb{R}$–linear ist. Seien dazu $b_1, b_2 \in \mathrm{Bil}(V)$, und $\lambda \in \mathbb{R}$. Es ist

$$\Theta(b_1 + b_2)(x)(y) = (b_1 + b_2)(x, y) = b_1(x, y) + b_2(x, y) = (\Theta(b_1) + \Theta(b_2))(y)$$

für alle $x, y \in V$ und daher $\Theta(b_1 + b_2) = \Theta(b_1) + \Theta(b_2)$. Weiter ist

$$\Theta(\lambda b_1)(x)(y) = (\lambda b_1)(x, y) = \lambda\Theta(b_1)(x)(y)$$

für alle $x, y \in V$ und daher $\Theta(\lambda b_1) = \lambda\Theta(b_1)$. Als nächstes zeigen wir die Injektivität von Θ. Angenommen $\Theta(b) = 0$. Dann ist $b(x, -) = 0$ für alle $x \in V$. Also $b(x, y) = 0$ für alle $x, y \in V$, also $b = 0$. Daher ist $\ker\Theta = \{0\}$. Schließlich zeigen wir die Surjektivität. Sei $f \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$. Dann ist die Abbildung $b\colon V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto f(x)(y)$ bilinear und $\Theta(b) = f$. Also ist Θ surjektiv, wegen $\dim \mathrm{Hom}(V, V^*) = (\dim V)^2$ folgt die letzte Behauptung.

(c) Sei nun b ein Skalarprodukt. Dann ist $f := \Theta(b)\colon V \longrightarrow V^*$ mit $f(x) = b(x, -)$. Wegen $\dim V = \dim V^*$ genügt es zu zeigen, dass f injektiv ist. Angenommen es ist $f(x) = 0$, dann ist $b(x, -) = 0$ also insbesondere $b(x, x) = 0$, da b positiv definit ist, folgt $x = 0$ und somit $\ker\Theta(b) = \{0\}$.

Hinweis zu Aufgabe 15

Seien $a = (a^k)_{k\geq 1}, b = (b^k)_{k\geq 1} \in l^2(\mathbb{R})$. Dann definieren wir $\langle a, b, :\rangle = \sum_{k\geq 1} a^k b^k$. Sofern diese Summe existiert folgt sofort die Bilinearität, Symmetrie und positive Definitheit. Es bleibt einzig zu zeigen, dass diese Summe konvergiert. Die Folgen $A^n := \sum_{k=1}^n |a^k|^2$, $B^n := \sum_{k=1}^n |b^k|^n$ sind offensichtlich monoton wachsend. Daher gilt $A^n \leq \sum_{k\geq 1} |a^k|^2 =: A$ und $B^n \leq \sum_{k\geq 1} |b^k|^2 =: B$. Wegen Korollar 2.3.2 folgt

$$\sum_{i=1}^n |a^k b^k| \leq \sqrt{A_n}\sqrt{B_n} \leq \sqrt{A}\sqrt{B}.$$

Somit ist die Folge $\sum_{i=1}^n |a^k b^k|$ beschränkt in n und monoton wachsend, also konvergent. Damit konvergiert $\sum_{k\geq 0} a^k b^k$ absolut und damit insbesondere schlechthin.

Hinweis zu Aufgabe 16

Da f, g normal sind, folgt nach Vorlesung $\mathrm{im} f = \mathrm{im} f^*$,$\ker f = \ker f^*$ sowie entsprechende Aussagen für g. Zunächst überlegt man sich $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$ sowie

$h^* = 0 \Leftrightarrow h = 0$. Damit folgt

$$\begin{aligned} f \circ g = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{img} \subseteq \ker f \\ &\Leftrightarrow \mathrm{img}^* \subseteq \ker f^* \\ &\Leftrightarrow f^* \circ g^* = 0 \\ &\Leftrightarrow (g \circ f)^* = 0 \\ &\Leftrightarrow (g \circ f) = 0. \end{aligned}$$