Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 5

Hinweis zu Aufgabe 17

(a) Setze $q = \prod_{j=1}^{k}(t - \lambda_j)$. Dann erfüllt das Polynom

$$p := \sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{q}{t - \lambda_i}$$

die gesuchte Eigenschaft. Man beachte, dass es sich tatsächlich um ein Polynom handelt. Alternativ kann man auch mit der Vandermondematrix argumentieren.

(b) Wegen $x \in \operatorname{Eig}(f; \lambda)$ gilt $(f^j)(x) = \lambda^j x$. Sei $q = \sum_{i=1}^{k} a_i t^i$ dann ist

$$q(f)(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i (f^i)(x) = \sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^i x = (\sum_{i=1}^{k} a_i \lambda^i) x = q(\lambda) x.$$

(c) Angenommen es ist $f^* = p(f)$. Da $p(f)$ eine Summe von Potenzen von f ist, gilt $p(f) \circ f = p(f) \circ f$, also ist insbesondere $f^* \circ f = f^* \circ f$. Sei nun umgekehrt f ein normaler Endomorphismus. Nach Theorem 2.10.5 ist f diagonalisierbar. Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ die verschiedenen Eigenwerte von f. Offensichtlich ist dann $k \leq n$. Nach Korollar 2.10.4 gilt $\operatorname{Eig}(f, \lambda_i) = \operatorname{Eig}(f^*, \overline{\lambda_i})$. für alle $1 \leq i \leq k$. Nach Teil (a) existiert $p \in \mathbb{C}[t]$ mit $p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ für $1 \leq i \leq k$. Wir setzen $g = p(f)$. Für $x \in \operatorname{Eig}(f; \lambda_i)$ folgt aus Teil (b) $g(x) = p(\lambda_i)x = \overline{\lambda_i}x$. Also stimmt g auf $\cup_{i=1}^{k} \operatorname{Eig}(f; \lambda_i)$ mit f^* überein. Da diese Vereinigung eine Basis enthält, folgt $g = f^*$.

Hinweis zu Aufgabe 18

Sei $A = (a^i_j)_{1 \leq i,j \leq n}$ die Darstellungsmatrix von $f \circ f^*$ bezüglich einer Orthonormalbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ von V. Dann gilt $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a^i_i$. Weiter gilt

$$a^i_i = e^t_i(AA^* e_i) = \langle e_i, AA^* e_i \rangle = \langle A^* e_i, A^* e_i \rangle = \|A^* e_i\| \geq 0.$$

Summiert man über i folgt daraus insbesondere $\operatorname{tr}(f \circ f^*) \geq 0$. Gilt $\operatorname{tr}(f \circ f^*) = 0$, so gilt mit obiger Argumentation $\|A^* e_i\| = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Also ist auch $A^* e_i = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Da die e_i eine Basis bilden, ist $A^* = 0$ und somit $A = 0$.

Hinweis zu Aufgabe 19

Wir nennen die Matrix auf der linken Seite A. Es ist $\chi_A(t) = t^4 - 4t^2$. Woraus wir die Eigenwerte $0, 0, 2, -2$ bestimmen. Berechnung der Eigenvektoren ergibt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Eig}(A; -2) &= \operatorname{span}((-1, 1 - 1, 1)^t) \\
\operatorname{Eig}(A; 0) &= \ker(A) = \operatorname{span}((1, 1, 1, 1)^t, (0, 1, 1, 0)^t) \\
\operatorname{Eig}(A; 2) &= \operatorname{span}((-1, -1, 1, 1)^t)
\end{aligned}$$

Um die gesuchte Matrix U zu finden, benötigen wir eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Nach Theorem 2.8.4 stehen die einzelnen Eigenräume schon senkrecht aufeinander. Wir müssen nur noch (z.B. mit Gram-Schmidt) eine Orthonormalbasis von $\mathrm{Eig}(A;0)$ finden und die anderen Eigenvektoren normieren. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{Eig}(A;-2) &= \mathrm{span}(\frac{1}{2}(-1,1-1,1)^t)\\ \mathrm{Eig}(A;0) = \ker(A) &= \mathrm{span}(\frac{1}{2}(1,1,1,1)^t, \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)^t)\\ \mathrm{Eig}(A;2) &= \mathrm{span}(\frac{1}{2}(-1,-1,1,1)^t)\end{aligned}$$

Somit ist

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu Aufgabe 20

Sei $Ax =: y$ und $t \in \mathbb{R}$. Wir betrachten

$$p(t) := \langle x + ty, A(x + ty)\rangle = \underbrace{\langle x, Ax\rangle}_{=0} + 2t\langle x, Ay\rangle + t^2\langle Ay, Ay\rangle$$

Dies ist ein Polynom in t vom Grad ≤ 2. Da A positiv semidefinit ist, ist $p(t) \geq 0$. Damit muss der Initialterm geraden Grad haben. Also muss $\langle x, Ay\rangle = 0$ gelten. Also

$$0 = \langle x, Ay\rangle = \langle x, A(Ax)\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|,$$

woraus $Ax = 0$ folgt.

Alternative 1:

Schreibe $A = \sqrt{A}^2$, mit $\sqrt{A} = \sqrt{A}^*$. Dann gilt

$$0 = \langle x, Ax\rangle = \left\langle x, \sqrt{A}\sqrt{A}x\right\rangle = \left\langle \sqrt{A}x, \sqrt{A}x\right\rangle,$$

woraus $x \in \ker\sqrt{A}$ folgt. Damit muss auch $Ax = 0$ gelten.

Alternative 2:

Betrachte die skalarwertige Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^t Ax$. Diese ist differenzierbar. Ist $f(x) = 0$, so ist x ein Minimum. Also ist $\nabla f(x) = Ax = 0$.