Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 6

Hinweis zu Aufgabe 21

(a) Offensichtlich ist $\langle -,-\rangle$ bilinear. Wegen $\operatorname{tr}(AB)=\operatorname{tr}(BA)$ ist $\langle -,-\rangle$ auch symmetrisch. Wegen $A=A^t=A^*$ ist $\langle A,A\rangle=\operatorname{tr}(AA)=\operatorname{tr}(A^*A)$. Nach Aufgabe 18 ist $\langle A,A\rangle\ge 0$ und $\langle A,A\rangle=0$ genau dann, wenn $A=0$ ist.

(b) Sei $A=(a^i_j)_{1\le i,j\le n}$ und $B=(b^i_j)_{1\le i,j\le n}$. Fasst man die Matrizen als Spaltenvektoren auf so ist das Standardskalarprodukt gerade $\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n a^i_j b^i_j$. Nun berechnen wir $\langle A,B\rangle$. Wegen $b^i_j=b^j_i$ folgt

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle &= \operatorname{tr}(AB)\\ &= \sum_{k=1}^n (AB)^k_k\\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n a^k_i b^i_k\\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n a^k_i b^k_i.\end{aligned}$$

(c) Wir zeigen xx^t symmetrisch und positiv definit. Es ist $(xx^t)^t=x^tx$, also $xx^t\in S$. Sei $y\in\mathbb{R}^n$, dann gilt $y^t(xx^t)y=(x^ty)^t(x^ty)=(x^ty)^2\ge 0$. Es folgt $xx^t\in S$.

(d) Wir zeigen beide Inklusionen. Sei zunächst $A,B\in S^+$. Man beachte, dass $\sqrt{A},\sqrt{B}$ hermitesche Matrizen sind. Es folgt

$$\begin{aligned}\langle A,B\rangle &= \operatorname{tr}(AB)\\ &= \operatorname{tr}(\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B})\\ &= \operatorname{tr}((\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B})\sqrt{B})\\ &= \operatorname{tr}(\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B})\\ &= \operatorname{tr}(\sqrt{B}^*\sqrt{A}^*\sqrt{A}\sqrt{B})\\ &= \operatorname{tr}((\sqrt{A}\sqrt{B})^*(\sqrt{A}\sqrt{B}))\\ &\ge 0,\end{aligned}$$

dabei folgt die letzte Ungleichung ebenfalls aus Aufgabe 18. Für die umgekehrte Inklusion nehmen man für $A\in S$ an, dass $\langle A,B\rangle\ge 0$ für alle $B\in S^+$ gilt. Wähle $B=xx^t$ für ein $x\in\mathbb{R}^n$. Dann ist $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(Axx^t)=\operatorname{tr}(x^tAx)=x^tAx\ge 0$. Also ist $x^tAx\ge 0$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$. Dies zeigt $A\in S^+$.

Hinweis zu Aufgabe 22

(a) Sei $x \in (U_1 + U_2)^\perp$. Dann gilt $b(x, u_1 + u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Also ist insbesondere $b(x, u_1 + 0) = 0$ und $b(x, 0 + u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Es folgt $(U_1 + U_2)^\perp \subseteq U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(b) Sei $x \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. Dann ist $b(x, u_1) = 0, b(x, u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Aufgrund der Bilinearität von b folgt $b(x, u_1 + u_2) = 0$ für alle $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$. Also $(U_1 + U_2)^\perp \supset U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

(c) Sei $x \in U_1^\perp + U_2^\perp$. Wir schreiben $x = x_1 + x_2$ mit $b(x_1, u_1) = 0$ für alle $u_1 \in U_1$ und $b(x_2, u_2) = 0$ für alle $u_2 \in U_2$. Ist $u \in U_1 \cap U_2$ so ist $b(x_1 + x_2, u) = b(x_1, u) + b(x_2, u) = 0 + 0$. Also ist $x \in (U_1 \cap U_2)^\perp$.

(d) Diese Inklusion ist im Allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, sei $b(v, w) := v^t \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} w$. Setze $U_1 = \text{span}((0,1)^t)$ und $U_2 = \text{span}((1,0)^t)$. Dann ist $U_1^\perp = U_2^\perp = \text{span}((1,-1)^t$. Anderseits ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und daher $(U_1 \cap U_2)^\perp = V \neq \text{span}((1,-1)^t)$.

(e) Sei $x \in U_1$ und $u \in U_1^\perp$. Dann ist $b(x, u) = 0$, also $x \in U_1^{\perp\perp}$.

(f) Dies ist im allgemeinen falsch. Betrachte zum Beispiel $b = 0$ auf $V = \mathbb{R}^2$. Ist $U_1 = \text{span}((1,0)^t)$. So ist $U_1^{\perp\perp} = V \neq U_1$.

Hinweis zu Aufgabe 23

Wir berechnen eine Diagonalisierung von $AA^* = AA^t$. Es ist

$$AA^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t.$$

Also sind die Eigenvektoren von AA^t gerade die Vektoren $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)^t$ und $v_3 = (0,0,1)^t$. Damit ist $Av_1 = 0$, $Av_2 = -2v_2$, $Av_3 = 3v_3$. Nach ergänzen und normieren erhalten wir die Orthonormalbasis $w_1 := v_1$ $w_2 = -v_2$, $w_3 = v_3$. Die Matrix, die v_i auf w_i abbildet ist gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Wurzel von AA^t ist gegeben durch

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt dann $A = SU$. Diese Zerlegung ist nicht eindeutig. Wir haben w_1 als v_1 wählen können. Alternativ hätte man auch $-v_1$ wählen können und wäre damit zu einer anderen Polarzerlegung gekommen.

Hinweis zu Aufgabe 24

Seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in K$ die Eigenwerte von g und $V_i := \text{Eig}(g; \lambda_i)$. Es ist $V = \bigoplus_{i=1}^k V_i$. Ist $x \in V_i$, so gilt $g(f(x)) = f(g(x)) = f(\lambda_i x) = \lambda_i f(x)$. Also ist auch $f(x)$ ein Eigenvektor von g zum Eigenvektor λ_i. Es folgt $f(V_i) \subseteq V_i$ für $i = 1, \ldots, k$. Also ist V_i ein f–invarianter Unterraum. Sei x ein Eigenvektor von f zum Eigenwert μ. Sei $x = x_1 + \cdots + x_k$ mit $x_i \in V_i$. Dann ist

$$\mu x = f(x) = f(x_1) + \cdots + f(x_k) = \mu x_1 + \cdots + \mu x_k.$$

Wegen $f(x_i) \in V_i$ sind dies zwei Zerlegungen von μx in Summen, deren Summanden in V_i liegen. Da die Summe direkt ist, folgt $f(x_i) = \mu x_i$. Also ist x_i ein Eigenvektor von f. Wegen $x_i \in V_i$ ist x_i aber auch ein Eigenvektor von g. Sei nun $x^1, \ldots, x^n$ eine Basis aus Eigenvektoren von f mit

$$x^j = x_1^j + \ldots + x_k^j \text{ mit } x_i^j \in V_i.$$

Dann ist die Menge $\{x_i^j \mid 1 \leq j \leq n, 1 \leq i \leq k\}$ ein Menge von simultanen Eigenvektoren von f und g. Weiter erzeugt diese Menge V. Daher ist eine Teilmenge dieser Menge eine Basis aus Eigenvektoren. Dies zwar zu zeigen.