Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 7

Hinweis zu Aufgabe 25

(a) Es gilt $\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle$ wegen $\langle v,w\rangle = 0$ folgt die Behauptung.

(a) Sei $u \in U$ beliebig und $r = \|x-u\|$. Setze $B := \{y \in V \mid \|x-y\| \le r\}$. Dann ist $G = B \cap U$ kompakt und nichtleer. Die stetige Funktion $u \mapsto \|x-u\|$ nimmt auf G somit ein Minimum an. Sei also $u_0 \in G$ mit $\|x-u_0\| \le \|x-u\|$ für alle $u \in G$. Offensichtlich gilt $\|x-u_0\| \le r$ und somit ist $\|x-u_0\| \le \|x-u\|$ für alle $u \in U$.

(b) Wähle eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_k$ von U und setze $w = \sum_{i=1}^k \langle x, v_i\rangle v_i$. Offensichtlich ist $w \in U$ und wie in Aufgabe 8 folgt $\langle x-w, u\rangle = 0$ für alle $u \in U$. Somit folgt

$$\|x-u_0\|^2 = \left\| x - w + \underbrace{w-u_0}_{\in U} \right\|^2 = \|x-w\|^2 + \|w-u_0\|^2$$

Aufgrund der Wahl von u_0 ist $\|x-u_0\|^2 \le \|x-w\|^2$ und somit $\|w-u_0\| = 0$, also $w = u_0$. Dies zeigt $x - u_0 \perp U$.

(c) Wir bestimmen zunächst eine Orthonormalbasis von V. Wir benutzen zum Beispiel die Basis

$$\left((1,0,0,0)^t, \frac{1}{3}(0,2,2,1)^t \right).$$

Damit ergibt sich

$$u_0 = 7v_1 + 3v_2 = (7,2,2,1)^t.$$

Hinweis zu Aufgabe 26

Wir bestimmen Eigenwerte und Eigenvektoren von A. Die Eigenwerte sind $\{0,4,9\}$, was zeigt, dass A positiv semidefinit ist. Eine dazu passende Basis aus normierten Eigenvektoren ist

$$(\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2)^t, \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^t, \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^t).$$

Mit

$$U := \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

folgt dann

$$A = U\operatorname{diag}(0,4,9)U^t = U\operatorname{diag}(0,2,3)\underbrace{U^tU}_{=I_3}\operatorname{diag}(0,2,3)U^t.$$

Also ist

$$\sqrt{A} = U\mathrm{diag}(0,2,3)U^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hinweis zu Aufgabe 27
Es ist

$$7x^2 + 8xy + y^2 = (x,y)\underbrace{\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}}_{=:A}(x,y)^t.$$

Wir diagonalisieren A und erhalten

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}(x,y)A(x,y)^t = 0 &\Leftrightarrow -(-x+2y)^2 + 9(2x+y)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -x+2y = 3(2x+y) \text{ oder } -x+2y = -3(2x+y) \\ &\Leftrightarrow y = -7x \text{ oder } y = -x.\end{aligned}$$

Diese Menge besteht also gerade aus zwei sich im Ursprung schneidenden Geraden.

Hinweis zu Aufgabe 28
Wir setzen

$$L_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und folgern

$$L_1A = \begin{pmatrix} 7 & 21 & 7 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$L_1AL_1^{-1} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 \\ 0 & 11 & -2 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das gleiche Argument mit der Matrix

$$L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

an und erhalten

$$L_2L_1A = L_1^tL_2^t = (L_2L_1)A(L_2L_1)^t = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & -13 \end{pmatrix}.$$

Das bedeutet nach Basiswechel (mit Basiswechselmatrix L_2L_1) hat die von A induzierte quadratische Form die Form

$$7\xi_1^2 + 11\xi_2^2 - 13\xi_3^2 = \left(\frac{\xi_1}{7}\right)^2 + \left(\frac{\xi_2}{11}\right)^2 - \left(\frac{\xi_3}{13}\right)^2.$$

Also ist $s = 2$ und $t = 3$