Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 8

Hinweis zu Aufgabe 29
Sei $n := \dim V$. Da ψ positiv definit ist, ist die Funktion

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{S}^{n-1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{\varphi(x,x)}{\psi(x,x)} \end{aligned}$$

stetig und nimmt somit auf $\mathbb{S}^{n-1}$ ihr Maximum an. Es gibt also ein $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x \in V$ mit

$$\frac{\varphi(y,y)}{\psi(y,y)} \le \lambda$$

für alle $y \in V$ und Gleichheit für $x = y$. Wähle nun $y \in V$ mit $\psi(y,x) = 0$. Wir betrachten die Funktion

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \frac{\varphi(x+ty, x+ty)}{\psi(x+ty, x+ty)}. \end{aligned}$$

Wegen $\psi(x,y) = 0$ folgt

$$g(t) = \frac{\varphi(x,x) + 2t\varphi(x,y) + t^2\varphi(y,y)}{\psi(x,x) + t^2\psi(y,y)}$$

Nach Konstruktion hat g an der Stelle $t = 0$ ein Maximum, es gilt daher

$$\begin{aligned} 0 &= \left.\frac{\partial g}{\partial t}\right|_{t=0} \\ &= \frac{2\varphi(x,y)\psi(x,x)}{\psi(x,x)} \\ &= 2\varphi(x,y) \end{aligned}$$

Bezüglich dem Skalarprodukt gegeben durch ψ gilt daher

$$\varphi(x,y) = 0 = \lambda\psi(x,y) \qquad \text{für alle } y \in \operatorname{span}(x)^\perp$$

Wegen $\varphi(x,x) = \lambda\psi(x,x)$ und $V = \operatorname{span}(x) + \operatorname{span}(x)^\perp$ folgt die Behauptung.

Hinweis zu Aufgabe 30
Diese Aussage ist falsch. Betrachte zum Beispiel

$$t \mapsto \begin{pmatrix} 1-t & 0 \\ 0 & 1+t \end{pmatrix}.$$

Seien e_1, e_2 die Standardbasisvektoren des $\mathbb{R}^2$. Für $t > 0$ ist $x_i(t) = \lambda_i(t)e_i$ für $i = 1, 2$ und stetigen Funktionen $\lambda_i(t)$. Für $t < 0$ ist $x_1(t) = \mu_2(t)e_2$ und $x_2(t) = \mu_1(t)e_1$. Damit die x_i stetig sind, müsste $x_i(0) = 0$ sein, was nicht möglich ist.

Hinweis zu Aufgabe 31

Für $a, b \in \mathbb{R}$ gilt stets $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$. Für $x \in \mathbb{S}^3$ gilt somit

$$\begin{aligned} |\langle x, Sx\rangle| &= \left|(x^1)^2 + x^2x^3 + x^3x^4\right| \\ &\leq (x^1)^2 + \frac{1}{2}((x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2) \\ &\leq (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Daher ist $|\langle x, (A+S)x\rangle - \langle x, Ax\rangle| \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{S}^3$. Sei $\mathcal{U}_k$ die Menge aller k–dimensionalen Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Nach Theorem 3.4.2 und wegen$|\langle x, (A+S)x\rangle - \langle x, Ax\rangle| \leq 1$ folgt

$$1 \geq \left| \inf_{U \in \mathcal{U}_k} \sup_{x \in \mathbb{S}^3 \cap U} - \inf_{U \in \mathcal{U}_k} \sup_{x \in \mathbb{S}^3 \cap U} \right| = |\lambda_k - \mu_k|$$

Hinweis zu Aufgabe 32

Da $\sqrt{B}$ symmetrisch ist, ist auch $\sqrt{B}^{-1} = \sqrt{B^{-1}}$ symmetrisch. Somit ist

$$(\sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1})^t = \sqrt{B}^{-t} A^t \sqrt{B}^{-t} = \sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1}.$$

Also ist die Matrix $G := \sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1}$ eine symmetrische Matrix. Sei $y_1, \ldots, y_n$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$ aus Eigenvektoren von G. Dabei sei $Gy_i = \lambda_i y_i$. Setze $x_i := \sqrt{B}^{-1} y_i$. Da B positiv definit ist, ist $x_1, \ldots, x_n$ ebenfalls eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Es gilt dann

$$\begin{array}{rrcl} & \sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1} y_i &=& \lambda_i y_i \\ \Rightarrow & \left(\sqrt{B}^{-1} A \sqrt{B}^{-1}\right) \sqrt{B} x_i &=& \lambda_i \sqrt{B} x_i \\ \Rightarrow & \sqrt{B}^{-1} A x_i &=& \lambda_i \sqrt{B} x_i \end{array}$$

Multipliziert man beide Seiten von links mit $\sqrt{B}$ folgt das Ergebnis.