Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
O. Schnürer, A. Kunert
SS 2013

Übungen zur Vorlesung Lineare Algebra II

Blatt 9

Hinweis zu Aufgabe 33

(a) Wegen $I + J = R$ existieren $x \in I$, $y \in J$ mit $x + y = 1$. Wir potenzieren diese Gleichung mit $n + m$ und erhalten

$$1 = (x + y)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i y^{n+m-i}$$

Jeder der Summanden ist in I^n oder in J^m enthalten, also ist $1 \in I^n + J^m$ und somit $R = I^n + J^m$.

(b) Sei a nilpotent und I ein maximales Ideal. Angenommen $a \notin I$. So ist $I \subsetneq (a) + I \subseteq R$. Aufgrund der Maximalität von I ist daher $(a) + I = R$. Somit ist auch $(a)^k + I = (a^k) + I = I = R$. Dies ist ein Widerspruch, also muss $a \in I$ gewesen sein.

Hinweis zu Aufgabe 34

Ist R ein Körper, so sind (0) und $(1) = R$ Ideale von R. Sei $I \subseteq R$ ein weiteres Ideal. Ist $0 \neq a \in I$, so ist auch $1 = a^{-1}a \in I$ und somit $I = R$. Dies zeigt, dass Körper genau 2 Ideale besitzen. Sei nun umgekehrt R ein Ring mit genau 2 Idealen. Da (0) und R stets Ideale sind, sind dies alle Ideale von R. Ist $0 \neq a \in \mathbb{R}$, so ist $(a) = R$. Also gibt es $b \in R$ mit $ab = 1$. Dies zeigt, dass jedes $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ invertierbar ist. Daher ist R ein Körper.

Hinweis zu Aufgabe 35

Wir betrachten den Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} e_a \colon K[x] &\longrightarrow K \\ f &\longmapsto f(a). \end{aligned}$$

Wegen $K \subseteq K[x]$ ist e_a surjektiv. Weiter ist nach Definition $\ker e_a = I_a$. Nach dem Isomorphiesatz für Ringe ist somit

$$K[x]/I_a = K[x]/\ker(e_a) = K$$

Nach Theorem 4.1.17 ist daher I_a maximal. Im allgemeinen gibt es noch andere maximale Ideale. Betrachte beispielsweise $K = \mathbb{R}$ und $I = (x^2 + 1)$. Dieses Ideal ist maximal. Angenommen es ist $(x^2 + 1) \subseteq J$ für ein Ideal J. Da $\mathbb{R}[x]$ ein Hauptidealring ist gibt es $a \in K[x]$ mit $(x^2 + 1) \subseteq (a)$. Dann wäre $a \mid x^2 + 1$. Da $x^2 + 1$ in $\mathbb{R}$ keine Nullstellen hat folgt $a \in \mathbb{R}$ oder $a = \lambda(x^2 + 1)$, also insbesondere $J = \mathbb{R}[x]$ oder $J = (x^2 + 1)$. Dies zeigt, dass I ein maximales Ideal ist, das nicht von obiger Form ist.

Hinweis zu Aufgabe 36

Sei $0 \neq a \in R$. Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda_a \colon R &\longrightarrow R \\ x &\longmapsto ax. \end{aligned}$$

Diese Abbildung ist injektiv, denn gilt $ax = ay$ so folgt $a(x - y) = 0$ und aufgrund der Integritätseigenschaft $x = y$. Da λ_a injektiv auf der endlichen Menge R ist, ist λ_a auch surjektiv. Also gibt es $x \in R$ mit $xa = 1$. Dies für alle $a \neq 0$ zeigt, dass R ein Körper ist.