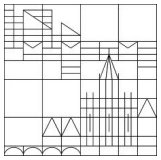
Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer, A. Kunert
WS 13/14



Übungen zur Vorlesung Algebra

Lernkontrollfragen

(1) Wie ist die Lokalisierung A_S eines Ringes A nach einer multiplikativen Menge S definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Primidealen von A und A_S?

(2) Welche Elemente eines Ringes sind prim, welche irreduzibel? Bestehen Implikationen zwischen diesen Begriffen?

(3) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Nullstellen eines Polynoms und seinen irreduziblen Faktoren

(4) Wann ist ein Polynom ohne Nullstellen in K irreduzibel über K?

(5) Welchen Grad kann ein irreduzibles Polynom über $\mathbb{R}$ haben? Welchen über $\mathbb{C}$ bzw. über $\mathbb{Q}$?

(6) Was besagt das Gaußsche Lemma? Wie beweist man es (Stichworte)? Welche Anwendung hat es?

(7) Welche Methoden gibt es, um die Irreduzibilität eines Polynoms festzustellen.

(8) Was ist der Unterschied zwischen algebraischen Körpererweiterungen und transzendenten Körpererweiterungen? Wie ordnet sich der Begriff der *endlichen Erweiterung* in dieses Begriffspaar ein?

(9) Warum ist $K[\alpha] = K(\alpha)$ falls α algebraisch über K ist?

(10) Wie kann man das Minimalpolynom von α über K verwenden, um in $K(\alpha)$ konkret zu rechnen?

(11) Wie ist der Zerfällungskörper eines Polynoms f definiert? Wie hängt dessen Grad mit $\deg(f)$ zusammen? Besitzt jedes f einen Zerfällungskörper? Wie kann man ihn konstruieren? Was ist eine *normale* Erweiterung?

(12) Was bedeutet es, wenn ein Element, ein Polynom oder eine Körpererweiterung separabel über K ist? Wie kann man Separabilität nachweisen?

(13) Für welche der Begriffe *algebraisch*, *normal*, *separabel*, *galoisch* gilt Transitivität?

(14) Welche besonderen Eigenschaften haben endliche Erweiterungen endlicher Körper?

(15) Welche Struktur hat die Einheitengruppe eines endlichen Körpers? Welche Struktur hat die Untergruppe aller n-ten Einheitswurzeln?

(16) Was besagt der Struktursatz endlicher abelscher Gruppen?

(17) Worin besteht der Unterschied zwischen direkten Produkt und semidirekten Produkt von Gruppen?

(18) Sei $N \trianglelefteq G$ und U ein Komplement von N in G. Gilt dann $G \cong N \times U$? Was gilt stattdessen? Was müsste man noch zusätzlich fordern?

(19) Was besagt die Klassengleichung?

(20) Was besagen die Sätze von Sylow? Inwiefern lassen sie sich anwenden, um Gruppen einer gegebenen Ordnung n zu klassifizieren.

(21) Wann ist eine Gruppe auflösbar? Welche Methoden stehen zur Verfügung, um dies für eine gegebene Gruppe zu verifizieren. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Auflösbarkeit einer Gleichung und der Auflösbarkeit einer Gruppe?

(22) Was besagt der Hauptsatz der Galoistheorie?

(23) Gibt es eine allgemeine Lösungsformel für Gleichungen vom Grad 5 oder höher? Warum nicht?

(24) Welcher Zusammenhang besteht zwischen symmetrischen Polynomen und elementarsymmetrischen Funktionen

(25) Löse alle Übungsaufgaben!