



Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 1

Abgabe: Donnerstag, 22. April 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 1

Bestimme alle primitiven pythagoräischen Tripel (a, b, c) mit $1 \leq a < b < c$ und $c \leq 40$.

Aufgabe 2

Sei $d \in \mathbb{N}$ ein Nichtquadrat, sei \sqrt{d} eine der beiden reellen Quadratwurzeln aus d , und sei $\mathbb{Z}[\sqrt{d}] = \{a + b\sqrt{d} : a, b \in \mathbb{Z}\}$. Für $\alpha = a + b\sqrt{d}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$ setzen wir $\alpha' := a - b\sqrt{d}$.

- (a) $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ist ein Teilring von \mathbb{R} .
- (b) Für $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ sei $N(\alpha) := \alpha\alpha'$. Dann gilt $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$ und $N(\alpha\beta) = N(\alpha)N(\beta)$.
- (c) $N(\alpha) = \pm 1 \Leftrightarrow \alpha$ ist Einheit von $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$.

Aufgabe 3

Sei A ein Ring, M ein A -Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Ist M endlich erzeugt, so auch M/N . Sind M/N und N endlich erzeugt, so auch M .

Aufgabe 4

Sei A ein noetherscher Ring, sei S eine multiplikative Teilmenge von A . Dann ist auch der Ring von Brüchen A_S noethersch.