Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 10

Abgabe: Donnerstag, 24. Juni 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 37

Sei A ein Dedekindring mit $K = \mathrm{Quot}(A)$, sei L/K eine endliche separable Erweiterung, und sei B der ganze Abschluß von A in L.

(a) Sind I, J Ideale von A mit $BJ \subseteq BI$, so folgt $J \subseteq I$.

(b) Für jedes Ideal I von A gilt $A \cap BI = I$.

Aufgabe 38

Sei $f = t^3 + t^2 - 2t + 8$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $f(\alpha) = 0$. Es soll gezeigt werden, daß $\mathcal{O}_K \neq \mathbb{Z}[\gamma]$ für alle $\gamma \in \mathcal{O}_K$ ist.

(a) Für $\beta := \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)$ gilt $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$.

(b) $\mathcal{O}_K/(2)$ ist isomorph zum direkten Produkt $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$.

(c) Unter der Annahme $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\gamma]$ betrachte man das Minimalpolynom von γ und erzeuge einen Widerspruch zu (b).

Hinweise: Für (a) berechne man zunächst die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$. Für (b) betrachte man die Minimalpolynome von α und β.

Aufgabe 39

Sei $f \in \mathbb{Z}[t]$ ein nichtkonstantes Polynom. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen p mit $p \mid f(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 40

Sei K ein Zahlkörper. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen, die in K total zerfallen. (*Anleitung:* Man reduziere auf den Fall, wo $K/\mathbb{Q}$ galoissch ist, und beachte die Aufgaben 24 und 39.)