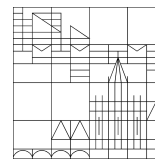


Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010



Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 11

Abgabe: Donnerstag, 1. Juli 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 41

Für $(m, n) = 1$ gilt $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}(\zeta_m)\mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$.

Aufgabe 42

Zu jeder endlichen abelschen Gruppe G gibt es eine galoissche Erweiterung K/\mathbb{Q} mit $\text{Gal}(K/\mathbb{Q}) \cong G$. (*Hinweis:* Man zeige, daß es einen Kreisteilungskörper $L = \mathbb{Q}(\zeta_n)$ mit $\text{Gal}(L/\mathbb{Q}) \rightarrow G$ gibt. Warum genügt das?)

Aufgabe 43

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ mit $\zeta = \zeta_n$. Dann ist

$$K \cap \mathbb{R} = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) = \mathbb{Q}\left(\cos \frac{2\pi}{n}\right).$$

Aufgabe 44

Die Klassenzahl des Körpers $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$ ist durch 3 teilbar. (*Anleitung:* Zeige zunächst $\mathbb{Q}(\sqrt{-23}) \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_{23})$. Zerlege die Primzahl 2 in $\mathbb{Q}(\zeta_{23})$, und benutze die Ergebnisse von Aufgabe 26.)