



## Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

### Blatt 12

**Abgabe:** Donnerstag, 8. Juli 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

#### Aufgabe 45

Beweise das quadratische Reziprozitätsgesetz, sowie die beiden Ergänzungssätze, für das Jacobisymbol.

#### Aufgabe 46

Sei  $p > 2$  prim, und sei  $a \in \mathbb{Z}$  mit  $(a, p) = 1$ . Ist  $\left(\frac{a}{p}\right) = 1$ , so ist  $a$  ein Quadrat modulo  $p^n$  für alle  $n \geq 1$ .

*Anleitung:* Man führe Newtoniteration durch: Für eine ganze Zahl  $x$  mit  $m := v_p(x^2 - a) \geq 1$  wähle man  $y \in \mathbb{Z}$  mit  $2xy \equiv 1 \pmod{p^{2m}}$  und betrachte  $x' := y(x^2 + a)$ .

#### Aufgabe 47

Sei  $p$  eine Primzahl mit  $p \equiv 1 \pmod{4}$ . Dann ist die Klassenzahl von  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{2p})$  größer als 1.

*Anleitung:* Man benutze den Satz von Dirichlet über Primzahlen in arithmetischen Progressionen, um eine Primzahl  $q \neq p$  mit  $q \equiv 5 \pmod{8}$  und  $\left(\frac{q}{p}\right) = -1$  zu finden, und untersuche dann die Zerlegung von  $q$ .

#### Aufgabe 48

Bestimme alle ganzen Zahlen  $a$ , welche sich in der Form

- (a)  $a = x^2 - 2y^2$ ,
- (b)  $a = x^2 - 3y^2$

mit  $x, y \in \mathbb{Z}$  schreiben lassen. (*Hinweis:*  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  und  $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$  haben Klassenzahl eins, das braucht nicht mehr gezeigt zu werden, vgl. auch Aufgabe 25.)