Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 3

Abgabe: Donnerstag, 6. Mai 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 9
Sei K ein imaginär-quadratischer Zahlkörper. Bestimme die Einheitengruppe von K (d.h. die Gruppe $\mathcal{O}_K^*$).

Aufgabe 10
Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit Ganzheitsring $\mathcal{O}_K$. Zeige: Die Ordnungen in K sind genau die $R_f := \mathbb{Z} + f\mathcal{O}_K$, wobei $f \geq 1$ eine ganze Zahl ist. (*Hinweis:* Für eine gegebene Ordnung R wähle $f \in \mathbb{N}$ minimal mit $f\mathcal{O}_K \subseteq R$.)

Aufgabe 11
Sei K ein Zahlkörper. Man zeige: Eine Teilmenge M von K ist genau dann ein Gitter in K, wenn es eine Ordnung R, ein Ideal $I \neq (0)$ von R und ein $k \geq 1$ gibt mit $M = \frac{1}{k} I$. (*Hinweis:* Ist M ein gegebenes Gitter, so betrachte man den Multiplikatorenring von M.)

Aufgabe 12
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha + 3 = 0$, sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

(a) Berechne $\mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^i)$ für $0 \leq i \leq 4$.
(b) Bestimme die Diskriminante von $\mathbb{Z}[\alpha]$.
(c) Zeige: Der Ganzheitsring von K ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.