Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 4

Abgabe: Freitag, 14. Mai 2010, 10.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 13
Sei A ein Ring, sei $I \neq (1)$ ein Ideal von A. Genau dann ist I ein Primideal von A, wenn für alle Ideale J_1, J_2 von A gilt:

$$J_1 J_2 \subseteq I \quad \Rightarrow \quad J_1 \subseteq I \,\vee\, J_2 \subseteq I.$$

(Hierbei ist $J_1 J_2$ das Idealprodukt von J_1 und J_2.)

Aufgabe 14
Sei K ein Zahlkörper vom Grad n, seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathcal{O}_K$ und $d = d_{K/\mathbb{Q}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$. Es soll gezeigt werden, daß $d \equiv 0$ oder $d \equiv 1 \pmod 4$ gilt (*Kriterium von Stickelberger*):

Sei $\mathrm{Hom}(K, \mathbb{C}) = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, schreibe $d = \det(V)^2$ mit $V = \det(\sigma_i(\alpha_j))$ (Vorlesung), und schreibe $\det(V) = P - N$, wobei P (bzw. N) die Summe der Terme zu geraden (bzw. ungeraden) Permutationen in der Leibniz-Formel für die Determinante sei. Nun gehe man wie folgt vor:

(a) $P + N$ und PN sind ganz über $\mathbb{Z}$.
(b) $P + N$ und PN liegen in $\mathbb{Q}$. (*Hinweis:* Sei L die galoissche Hülle von $K/\mathbb{Q}$. Man zeige, daß $P + N$ und PN invariant unter $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ sind.)
(c) Folgere $P + N$, $PN \in \mathbb{Z}$ und zeige daraus die Behauptung.

Aufgabe 15
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeige $[K : \mathbb{Q}] = 3$ und $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$. (*Hinweis:* Aufgabe 14.)

Aufgabe 16
Sei A ein Dedekindring, sei $\mathfrak{p}$ ein Primideal von A, und seien I, J gebrochene Ideale von A. Dann gilt:

$$v_{\mathfrak{p}}(I + J) = \min\{v_{\mathfrak{p}}(I),\, v_{\mathfrak{p}}(J)\}, \quad v_{\mathfrak{p}}(I \cap J) = \max\{v_{\mathfrak{p}}(I),\, v_{\mathfrak{p}}(J)\}.$$