Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 5

Abgabe: Donnerstag, 20. Mai 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 17

Sei $f = x^3 - x + 2$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Berechne explizit die Produktzerlegung von p in Primideale von $\mathcal{O}_K$ für $p = 2, 3, 11, 31$, sowie die Restklassengrade der beteiligten Primideale. (*Hinweis:* Faktorisiere $f(-3)$ und $f(4)$. Es ist $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$, wie man mit Stickelbergers Kriterium sehen kann, das braucht nicht bewiesen zu werden.)

Aufgabe 18

(a) Sei A ein Ring, und seien I, J Ideale von A mit $I + J = A$. Dann gilt auch $I^m + J^n = A$ für alle $m, n \geq 1$.

(b) Sei A ein Dedekindring und $K = \mathrm{Quot}(A)$. Seien $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_r \neq (0)$ paarweise verschiedene Primideale von A, und seien $e_1, \dots, e_r \in \mathbb{Z}$. Dann existiert ein Element $x \in K$ mit $v_{\mathfrak{p}_i}(x) = e_i$ für $i = 1, \dots, r$.

Anleitung zu (b): Zunächst zeige man, daß man sich auf den Fall $e_i \geq 0$ beschränken kann. Dann benutze man den Chinesischen Restsatz.

Aufgabe 19

Sei K ein quadratischer Zahlkörper, sei p eine Primzahl, und sei $(p) = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ mit Primidealen $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ von $\mathcal{O}_K$ (nicht notwendig voneinander verschieden).

(a) $\mathfrak{p}_1$ ist ein Hauptideal von $\mathcal{O}_K$ $\Leftrightarrow$ $\mathfrak{p}_2$ ist ein Hauptideal von $\mathcal{O}_K$.

(b) Genau dann sind $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ Hauptideale von $\mathcal{O}_K$, wenn es ein $\alpha \in \mathcal{O}_K$ gibt mit $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) = \pm p$.

(c) Sei $d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $d \not\equiv 1 \pmod 4$, und sei $d < 0$ oder $d \in \{2, 3, 10\}$. Entscheide für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, ob das Primideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}^2 = (2)$ ein Hauptideal ist, und gib gegebenenfalls einen Erzeuger von $\mathfrak{p}$ an.

Aufgabe 20

Sei $f \in \mathbb{Z}[x]$ ein normiertes Eisensteinpolynom vom Grad n bezüglich der Primzahl p. Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Man zeige, daß der Index von $\mathbb{Z}[\alpha]$ in $\mathcal{O}_K$ nicht durch p teilbar ist.

Anleitung: Angenommen falsch. Man zeige, daß es dann ein $\beta \in \mathcal{O}_K$ gibt mit $p\beta \in \mathbb{Z}[\alpha]$ und $\beta \notin \mathbb{Z}[\alpha]$, und daß man dabei $\beta \in \mathbb{Q}\alpha^{n-1}$ erreichen kann. Nun betrachte man Normen.