Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 6

Abgabe: Donnerstag, 27. Mai 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 21
Es sei A ein Dedekindring.

(a) Sei I ein Ideal von A. Zu jedem $0 \neq a \in I$ existiert ein $b \in I$ mit $I = (a, b)$.
(b) Hat A nur endlich viele Primideale, so ist A ein Hauptidealring.

(*Hinweis:* Aufgabe 18.)

Aufgabe 22
Ein Zahlkörper K heißt *normeuklidisch*, falls $\mathcal{O}_K$ bezüglich der Wertefunktion

$$\phi(x) := \left|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x)\right| \quad (x \in \mathcal{O}_K)$$

ein euklidischer Ring ist. Man zeige:

(a) Ist K normeuklidisch, so ist die Klassengruppe von K trivial.
(b) Genau dann ist K normeuklidisch, wenn gilt: $\forall\, \alpha \in K\ \exists\, \beta \in \mathcal{O}_K$ mit $|\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha - \beta)| < 1$.
(c) Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei. Entscheide für einige kleine Werte von d, ob K normeuklidisch ist. (Anspruchsvoller: Bestimme alle quadratfreien $d \geq 1$, für die K normeuklidisch ist.)

Hinweis zu (c): Man bette den Körper K nach $\mathbb{C}$ ein und zeige $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(x) = |x|^2$ für $x \in K$, wobei $|x|$ den Absolutbetrag der komplexen Zahl x bezeichnet. Dann argumentiere man geometrisch.

Aufgabe 23
Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^2 = 10$, sei I das von $2 + 5\alpha$ und $16 - \alpha$ in $\mathcal{O}_K$ erzeugte Ideal. Bestimme die Faktorzerlegung von I in Primideale von $\mathcal{O}_K$ und die Idealnorm $\mathrm{N}(I)$ von I, und gib Erzeuger für das inverse gebrochene Ideal $I^\vee$ an. (*Hinweis*: Bestimme zunächst die Struktur des Restklassenrings $\mathcal{O}_K/I$.)

Aufgabe 24

(a) Sei $A \subseteq B$ eine Ringerweiterung derart, daß der Index (der additiven Gruppen) $m := [B : A]$ endlich ist, und sei $k \in \mathbb{N}$ mit $(m, k) = 1$. Dann ist der natürliche Ringhomomorphismus $A/kA \to B/kB$ ein Isomorphismus.
(b) Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, und sei α Nullstelle eines normierten Eisensteinpolynoms bezüglich der Primzahl p. Dann ist $\mathfrak{p} := (p, \alpha)$ ein Primideal in $\mathcal{O}_K$, und es gilt $p\mathcal{O}_K = \mathfrak{p}^n$ mit $n := [K : \mathbb{Q}]$. (*Hinweis:* Aufgabe 20.)