Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Claus Scheiderer
Dipl.-Math. Aaron Kunert
SS 2010

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 7

Abgabe: Freitag, 4. Juni 2010, 14.00 Uhr (Briefkasten auf F4)

Aufgabe 25

Zeige: Der reell-quadratische Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ ist normeuklidisch. (Skizze!)

Aufgabe 26

Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-23})$, und sei $\omega = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{-23})$. Sei $\alpha \mapsto \overline{\alpha}$ der Erzeuger von $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$. Zeige:

(a) Es gilt $(2) = \mathfrak{p}\overline{\mathfrak{p}}$ mit $\mathfrak{p} = (2, \omega)$ in $\mathcal{O}_K$.
(b) $\mathfrak{p}^3 = (\omega - 2)$.
(c) $\mathfrak{p}$ ist kein Hauptideal.
(d) Die Klassenzahl von K ist durch 3 teilbar.

Aufgabe 27

Sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ mit $\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$. Man zeige $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 28

Sei K ein quadratischer Zahlkörper mit $d_K < -11$. Man zeige:

(a) Für jede Nichteinheit $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$ ist $\mathrm{N}_{K/\mathbb{Q}}(\alpha) \geq 4$.
(b) Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist nicht euklidisch (bezüglich irgend einer Wertefunktion).

Hinweis zu (b): Angenommen, es gebe eine euklidische Wertefunktion $\phi\colon \mathcal{O}_K \smallsetminus \{0\} \to \mathbb{N}$. Wähle eine Nichteinheit $0 \neq \alpha \in \mathcal{O}_K$ mit minimalem $\phi(\alpha)$, und zeige: Jedes $\beta \in \mathcal{O}_K$ ist modulo (α) kongruent zu 0 oder ± 1. Benutze (a), um daraus einen Widerspruch zu konstruieren.