**Universität Konstanz**
**Fachbereich Mathematik und Statistik**
**Sommersemester 2011**

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

# Übungsblatt 3 zur Zahlentheorie

Sei $R$ ein Ring.

**Aufgabe 1.**
Zeige, dass jeder endlich erzeugte $\mathbb{Z}$–Untermodul von $\mathbb{Q}$ frei vom Rang 1 ist, jedoch $\mathbb{Q}$ selbst nicht frei als $\mathbb{Z}$–Modul ist.

**Aufgabe 2.**
Sei $M$ ein endlich erzeugter $R$–Modul. Zeige

(a) Es gibt einen $R$–Modul $N$, einen freien $R$–Modul $F$ und eine kurze exakte Sequenz (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1)
$$0 \longrightarrow N \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

(b) Ist $R$ aufgefasst als Modul über sich selbst halbeinfach, so ist $M$ halbeinfach.

(c) Jeder endlich erzeugte Modul $M$ über $R = M_{n\times n}(K)$ (für $n \in \mathbb{N}$ und $K$ ein Körper) ist halbeinfach.

**Aufgabe 3.**
Seien $L$,$M$ und $N$ Moduln über $R$ und
$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0$$
eine kurze exakte Sequenz (vgl. Blatt 2, Aufgabe 1). Zeige, dass diese zerfällt, wenn $N$ frei ist. Zeige durch Gegenbeispiel, dass die Sequenz im Allgemeinen nicht zerfällt, wenn man stattdessen voraussetzt, dass $M$ frei ist.

**Aufgabe 4.**
Seien $M$ und $N$ zwei $R$–Moduln von endlicher Länge. Angenommen in Kompositionsreihen von $M$ und $N$ treten (mit Vielfachheit) die gleichen Kompositionsfaktoren auf. Gilt dann $M \cong N$ ? Finde einen Beweis oder ein Gegenbeispiel.

**Abgabe bis Montag, den 9. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.**