
Übungsblatt 4 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.

Sei R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$. Zeige, dass R genau dann ein Körper ist, wenn jeder endlich erzeugte R -Modul frei ist.

Aufgabe 2.

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass eine Zerlegung in unzerlegbare Moduln im Allgemeinen nicht eindeutig ist.

- (a) Zeige, dass jedes Ideal $(0) \neq I \subseteq R$ eines Integritätsrings R ein unzerlegbarer R -Modul ist.
- (b) Sei R ein kommutativer Ring und $I_1, I_2 \subseteq R$ *koprime* Ideale, d.h. $I_1 + I_2 = R$. Konstruiere eine kurze exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow I_1 \cap I_2 \longrightarrow I_1 \oplus I_2 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

von R -Moduln.

- (c) Ist R ein Integritätsring und seien $I_1, I_2 \subseteq R$ kopprime Ideale, so ist $I_1 \oplus I_2 \cong R \oplus (I_1 \cap I_2)$ jeweils eine Zerlegung von $I_1 \oplus I_2$ in unzerlegbare Moduln. (Tip: Blatt 3, Aufgabe 3)
- (d) Benutze Teil (c) um einen Ring R und unzerlegbare R -Moduln M_1, M_2, N_1, N_2 zu finden mit $M_1 \oplus M_2 \cong N_1 \oplus N_2$, so dass $N_1 \not\cong M_1$ und $N_2 \not\cong M_2$.
(Tip: Wähle zum Beispiel $R = \mathbb{Z}[X]$. Wann ist ein Ideal als R -Modul isomorph zu R ?)

Aufgabe 3.

Sei M ein Modul. Dann ist die Menge $\text{End}(M)$ mit der punktweisen Addition und der Hintereinanderschaltung als Multiplikation ein Ring.

Aufgabe 4.

Sei R ein Hauptidealring, M ein zyklischer R -Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul. Zeige, dass auch N ein zyklischer Modul ist. Ist die Aussage immer noch wahr, wenn R ein beliebiger kommutativer Ring ist?

Abgabe bis Montag, den 16. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.