Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 6 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei R ein kommutativer Ring mit $0 \neq 1$ und M ein R–Modul. Dann vermitteln die Zuordnungen

$$f \longmapsto \left(\begin{array}{rl} R[X] \times M & \longrightarrow M \\ (p,x) & \longmapsto p(f)(x) \end{array} \right)$$

und

$$\left(\begin{array}{rl} M & \longrightarrow M \\ x & \mapsto X \cdot x \end{array} \right) \longleftarrow\!\! \shortmid \; \cdot$$

eine Bijektion zwischen $\mathrm{End}(M)$ und allen $R[X]$–Skalarmultiplikationen, die die Skalarmultiplikation von R fortsetzen und M zu einem $R[X]$–Modul machen.

Aufgabe 2.
Zeige, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ kein Hauptidealring ist.

Aufgabe 3.
Sei R ein kommutativer Ring und M ein endlich erzeugter R–Modul. Ist $f \in \mathrm{End}(M)$ surjektiv, so ist f ein Isomorphismus. (Hinweis: Aufgabe 1 und Cayley-Hamilton helfen weiter)

Aufgabe 4.
Sei $A \subseteq B$ eine ganze Erweiterung von Integritätsringen. Zeige, dass A genau dann ein Körper ist, wenn B ein Körper ist.

Abgabe bis Montag, den 30. Mai 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.