Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 9 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei K ein algebraischer Zahlkörper mit Zahlring R. Ist $0 \neq x \in R$, so gilt

$$|R/(x)| = |N_{K|\mathbb{Q}}(x)|.$$

Hinweis: Man verwende, was in der Vorlesung in Kürze bewiesen wird: Ist K ein Zahlkörper mit Zahlring R, so ist R ein freier $\mathbb{Z}$-Modul vom Rang $[L : K]$. Man beachte nun Erinnerung 1.6.4 einschließlich der Bemerkung, die dort über Determinanten gemacht wird. Man verwende das Verfahren aus 1.6.6(b) wie im Beweis des Struktursatzes 1.6.9(a) für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen.

Aufgabe 2.
Sei R ein Dedekindring. , $\mathfrak{p} \subset R$ ein Primideal und $0 \neq I \subseteq R$ ein beliebeges Ideal. Zeige

(a) Ist $\mathfrak{p} \neq (0)$ ein Primideal von R und $n \in \mathbb{N}_0$, so hat der Ring $R/\mathfrak{p}^n$ nur endliche viele Ideale, und jedes davon ist ein Hauptideal.

(b) Ist $I \neq (0)$ ein Ideal von R, so hat der Ring R/I nur endliche viele Ideale, und jedes davon ist ein Hauptideal.
Tip: Chinesischer Restsatz.

(c) Für alle $0 \neq a \in I$ gibt es ein $b \in I$, so dass $I = (a,b)$ ist. Insbesondere lässt sich jedes Ideal von R mit zwei Elementen erzeugen.

Aufgabe 3.
Sei $\pi = \sqrt{-5} = \mathbb{i}\sqrt{5}$ und $R := \mathbb{Z}[\pi]$ der Zahlring des quadratischen Zahlkörpers $K := \mathbb{Q}(\pi)$.

(a) Zeige, dass eine Primzahl $p \in \mathbb{P}$ genau dann irreduzibel in R ist, wenn es keine $x,y \in \mathbb{Z}$ gibt mit

$$x^2 + 5y^2 = p.$$

(b) Zeige, dass 3 und 7 irreduzibel aber nicht prim in R sind.

(c) Zeige, dass $R/3R \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ als abelsche Gruppe ist.

(d) Zeige, dass $(3) = (3, 1 + 2\pi)(3, 1 - 2\pi)$ die Primidealzerlegung von (3) in R ist. Finde die Primidealzerlegung von (7) in R.

Abgabe bis Montag, den 20. Juni 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.