
Übungsblatt 11 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad n . Sei weiter G ein freier \mathbb{Z} -Untermodul von K mit Basis x_1, \dots, x_n .

- (a) Zeige, dass es ein $s \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass $sG \subseteq \mathcal{O}_K$ und $s\mathcal{O}_K \subseteq G$.
(b) Zeige, dass die *Diskriminante* von G

$$d(G) := d_{K|\mathbb{Q}}(x_1, \dots, x_n)$$

wohldefiniert ist, das heißt nicht von der Wahl der Basis x_1, \dots, x_n von G abhängt.

- (c) Sei H ein freier \mathbb{Z} -Untermodul von G vom Rang n . Zeige $[G : H] < \infty$ und

$$[G : H]^2 d(G) = d(H).$$

Aufgabe 2.

Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grad n und R ein Unterring des Zahlrings \mathcal{O}_K mit $\text{qf}(R) = K$. Zeige:

- (a) R ist ein freier \mathbb{Z} -Modul vom Rang n .
(b) Gibt es kein $p \in \mathbb{P}$ mit $p^2 \mid d(R)$, so ist $R = \mathcal{O}_K$.

Aufgabe 3.

Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 - z + 3 = 0$.

- (a) Bestimme den Grad des Zahlkörpers $K := \mathbb{Q}(z)$.
(b) Bestimme den Zahlring \mathcal{O}_K von K .