Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Sommersemester 2011

Christoph Hanselka
Aaron Kunert
Markus Schweighofer

Übungsblatt 12 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.
Sei $K := \mathbb{R}(X^2) \subseteq L := \mathbb{R}(X)$ und $A := \mathbb{R}[X^2] \subseteq B := \mathbb{R}[X]$.

(a) Zeige, dass A ein Hauptidealring (und damit ein Dedekindring) mit Quotientenkörper K ist.

(b) Zeige, dass $L|K$ eine Galoiserweiterung vom Grad 2 ist.

(c) Zeige, dass B der ganze Abschluss von A in L ist.

(d) Bestimme explizit alle Primideale von A und von B.

(e) Bestimme den Verzweigungsindex $e_{\mathfrak{p}}(B)$ und den Trägheitsindex $f_{\mathfrak{p}}(B)$ in B über jedem $\mathfrak{p} \in M_A$.

Aufgabe 2.
Sei $d \in \not\Box$ und $K := \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Bestimme für jedes $p \in \mathbb{P}$ den Verzweigungsindex $e_{p\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K)$ und den Trägheitsindex $f_{p\mathbb{Z}}(\mathcal{O}_K)$ von $p\mathbb{Z}$ in $\mathcal{O}_K$.
Hinweis: Verwende das Gitter $Z[\sqrt{d}]$ außer wenn gleichzeitig $d \in \not\Box_1$ und $p = 2$.

Aufgabe 3.
Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $z^3 - z + 3$ und R der Zahlring von $\mathbb{Q}(z)$ (vgl. Aufgabe 3 auf Blatt 11). Bestimme die Primidealzerlegung von $2\mathbb{Z}$, $3\mathbb{Z}$, $5\mathbb{Z}$, $7\mathbb{Z}$ und $11\mathbb{Z}$ in R.

Abgabe bis Montag, den 11. Juli 2011, 10 Uhr in die Briefkästen neben F411.