
Lösungsblatt 1 zur Zahlentheorie

Aufgabe 1.

- (a) Seien $A, B \in S$. Wir zeigen zunächst, dass die Summe wohldefiniert also endlich ist. Seien dazu $i, k \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}$, so dass $A(i, j) = 0$ für alle $j \geq r$. Daher ist

$$AB(i, k) = \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j)B(j, k) = \sum_{j \leq r} A(i, j)B(j, k)$$

und die Multiplikation ist wohldefiniert. Als nächstes zeigen wir $AB \in S$. Dazu genügt es zu zeigen, dass jede Spalte und jede Zeile von AB endlichen Träger hat. Sei $i \in \mathbb{N}$ fixiert. Dann gibt es nur endlich viele $j \in \mathbb{N}$ mit $A(i, j) \neq 0$. Insbesondere gibt es ein $s \in \mathbb{N}$, so dass $B(j, t) = 0$ für alle $t \geq s$ und für alle $j \in \mathbb{N}$ mit $A(i, j) \neq 0$ ist. Daher ist auch

$$AB(i, t) = \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j)B(j, t) = 0$$

für alle $t \geq s$. Dies zeigt, dass alle Zeilen von AB endlichen Träger haben. Analog zeigt man, dass alle Spalten von AB endlichen Träger haben.

- (b) Seien $A, B, C \in S$. Für $i, l \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} ((AB)C)(i, l) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (AB)(i, k)C(k, l) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(\sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j)B(j, k) \right) C(k, l) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} (A(i, j)B(j, k))C(k, l) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j)(B(j, k)C(k, l)) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \mathbb{N}} A(i, j)(B(j, k)C(k, l)) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j) \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} B(j, k)C(k, l) \right) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i, j)(BC)(j, l) \\ &= A(BC)(i, l). \end{aligned}$$

Dabei sei bemerkt, dass alle auftretenden Summen endlich und daher obige Umformungen

gerechtfertigt sind. Dies zeigt die Assoziativität der Multiplikation. Weiter zeigt man

$$\begin{aligned}
 ((A+B)C)(i,l) &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (A+B)(i,k)C(k,l) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (A(i,k) + B(i,k))C(k,l) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} (A(i,k)C(k,l) + B(i,k)C(k,l)) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} A(i,k)C(k,l) + \sum_{k \in \mathbb{N}} B(i,k)C(k,l) \\
 &= (AC)(i,l) + BC(i,l).
 \end{aligned}$$

Dies zeigt die Distributivität von Addition und Multiplikation. Wir definieren $E \in R^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ durch

$$E(i,k) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = k \\ 0 & \text{für } i \neq k \end{cases}.$$

Da in jeder Spalte und jeder Zeile von E nur ein Element verschieden von 0 ist, gilt $E \in S$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
 (AE)(i,k) &= \sum_{j \in \mathbb{N}} A(i,j)E(j,k) \\
 &= A(i,k) \\
 &= (EA)(i,k).
 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass S ein Ring mit dem Einselement E ist.

- (c) Für $A \in S$ und $i, j \in \mathbb{N}$ ist $A_1(i, j) = A(i, 2j - 1)$ und $A_2(i, j) = A(i, 2j)$. Dies zeigt, dass $A_1, A_2 \in S$ und damit f wohldefiniert ist. Wir zeigen, dass die Abbildung $f_1: A \mapsto A_1$ ein S -Modulhomomorphismus ist. Seien dazu $A, B \in S$. Es ist

$$\begin{aligned}
 f_1(A+B)(i, j) &= (A+B)(i, 2j-1) \\
 &= A(i, 2j-1) + B(i, 2j-1) \\
 &= (f_1(A) + f_1(B))(i, j).
 \end{aligned}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
 f_1(AB)(i, j) &= (AB)(i, 2j-1) \\
 &= \sum_{k \in \mathbb{N}} A(i, k)B(k, 2j-1) \\
 &= (Af_1(B))(i, j),
 \end{aligned}$$

was zeigt, dass f_1 ein S -Modulhomomorphismus ist. Analog zeigt man, dass auch f_2 und damit f ein S -Modulhomomorphismus ist. Wir definieren die Abbildung

$$\begin{aligned}
 g: S^2 &\rightarrow S \\
 (A, B) &\mapsto g(A, B),
 \end{aligned}$$

mit

$$g(A, B)(i, j) = \begin{cases} A(i, \frac{j}{2}) & \text{falls } j \text{ gerade} \\ B(i, \frac{j+1}{2}) & \text{falls } j \text{ ungerade} \end{cases}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $f \circ g = \text{id}_{S^2}$ und $g \circ f = \text{id}_S$ gilt. Daher ist f bijektiv und somit ein S -Modulisomorphismus.

Aufgabe 2.

Sei R ein Ring, $f: M \rightarrow N$ ein R -Modulhomomorphismus und U ein Untermodul von M mit $U \subseteq \ker(f)$. Sei weiter $\pi: M \rightarrow M/U$ der natürliche Epimorphismus. Zu zeigen ist, dass genau ein R -Modulhomomorphismus $\bar{f}: M/U \rightarrow N$ existiert, so dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ & \searrow \pi & \nearrow \bar{f} \\ & M/U & \end{array}$$

kommutiert. Dazu definieren wir die Abbildung \bar{f} für $\bar{v} \in M/U$ durch $\bar{f}(\bar{v}) := f(v)$. Da eine Nebenklasse \bar{v} im Allgemeinen durch mehrere Elemente aus M repräsentiert wird, ist zunächst zu überprüfen, dass diese Definition nicht vom Vertreter abhängt. Seien also $w, v \in M$ mit $\bar{v} = \bar{w}$. Dann ist $f(v) - f(w) = f(w - v) = 0$, denn $w - v \in U \subseteq \ker(f)$. Daher ist insbesondere $f(v) = f(w)$ und die Abbildung \bar{f} ist wohldefiniert. Nun überprüft man, dass es sich bei \bar{f} um einen R -Modulhomomorphismus handelt. Sei dazu $\bar{v}, \bar{w} \in M/U$ und $r \in R$. Es ist $\bar{f}(\bar{v} + \bar{w}) = \bar{f}(\overline{v + w}) = f(v + w) = f(v) + f(w) = \bar{f}(\bar{v}) + \bar{f}(\bar{w})$ und weiter $\bar{f}(r\bar{v}) = \bar{f}(\overline{rv}) = f(rv) = rf(v) = r\bar{f}(\bar{v})$, was zeigt, dass \bar{f} in der Tat ein Homomorphismus ist. Offenbar ist auch $(\bar{f} \circ \pi)(v) = \bar{f}(\bar{v}) = f(v)$ für alle $v \in M$, was zeigt, dass obiges Diagramm kommutiert. Angenommen es gäbe noch eine weitere Abbildung $g: M/U \rightarrow N$, die obiges Diagramm kommutativ macht. Dann müsste gelten $g \circ \pi = f$ und daher $g(\bar{v}) = f(v)$ für alle $v \in M$. Dann ist aber offensichtlich $g = \bar{f}$.

Zusatz: Ist $U = \ker(f)$, so ist \bar{f} ein Isomorphismus auf das Bild von f .

Aus der Konstruktion von \bar{f} folgt sofort, dass $\text{im}(f) = \text{im}(\bar{f})$ gilt. Es bleibt also zu zeigen, dass \bar{f} injektiv ist. Angenommen $\bar{f}(\bar{v}) = 0$ für ein $v \in M$, so ist $f(v) = 0$ und daher $v \in \ker(f)$. Insbesondere haben wir $\bar{v} = 0$, was die Injektivität von f zeigt.

Aufgabe 3.

Typische Fragen wären beispielsweise gewesen, warum ein R -Modul im Allgemeinen keine Basis besitzt, oder warum in einem R -Modul M die Situation $rv = 0$ mit $r \in R \setminus \{0\}$ und $v \in M \setminus \{0\}$ auftreten kann.