Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 1

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Beweisen Sie den Satz von Wilson: Eine ganze Zahl $m \in \mathbb{N}$ ist genau dann prim, wenn $(m-1)! \equiv -1 \mod m$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie alle $m \in \mathbb{Z}$, so dass m, $2m+1$ und $4m+1$ Primzahlen sind.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die $n \times n$-Matrizen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ bilden einen Teilring $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}^{n\times n}$. Es sei $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})^\times$ die Gruppe der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit ganzen Koeffizienten. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) = \{A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z}) \ : \ \det(A) = \pm 1\}$.
b) Für $M \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{Z})$ existieren $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$, so dass AMB Diagonalgestalt hat.

Aufgabe 4
Wiederholen Sie die Begriffe euklidischer Ring, Hauptidealring und faktorieller Ring. Rekonstruieren Sie die Beweise, dass jeder euklidischer Ring ein Hauptidealring ist, sowie dass jeder Hauptidealring faktoriell ist. Benennen Sie einen faktoriellen Ring, der kein Hauptidealring ist, sowie einen integren Ring, der nicht faktoriell ist. Kennen Sie einen Hauptidealring, der nicht euklidisch ist?

Abgabe: Donnerstag, 26. April 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.