Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 10

Aufgabe 37 (4 Punkte)
Sei $f \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Eisensteinpolynom vom Grad n zur Primzahl p. Man wähle $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $f(\alpha) = 0$ und setze $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Sie sollen beweisen, dass

$$(\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha]) \not\equiv 0 \bmod p.$$

Gehen Sie dabei wie folgt vor: Unter der Annahme, dass $p | (\mathcal{O}_K : \mathbb{Z}[\alpha])$,

a) gibt es ein $x \in \mathcal{O}_K$ mit $px \in \mathbb{Z}[\alpha]$ und $x \notin \mathbb{Z}[\alpha]$;
b) gibt es $c \in \mathbb{Z}$ mit $c \not\equiv 0 \bmod p$ und $cp^{-1}\alpha^{n-1} \in \mathcal{O}_K$;
c) führt die Betrachtung der Norm von $cp^{-1}\alpha^{n-1}$ zu einem Widerspruch.

Aufgabe 38 (4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha^2 - 2\alpha - 2 = 0$ und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie:

a) K ist ein Zahlkörper vom Grad 3.
b) $\Delta_K = -152$.
c) $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$.

Aufgabe 39 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Ist R ein diskreter Bewertungsring mit maximalem Ideal (π), so ist jedes nichttriviale Ideal von R von der Form (π^n) für ein $n \in \mathbb{N}$.
b) Ist R ein integrer Ring und gibt es ein $\pi \in R$, so dass jedes nichttriviale Ideal von R von der Form (π^n) ist, so ist R ein diskreter Bewertungsring.
c) Es gibt diskrete Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p(t)$, aber nicht auf $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{F}_{p^n}$.

Aufgabe 40 (4 Punkte)
Ein integrer Ring R mit Quotientenkörper K ist ein **Bewertungsring**, wenn für jedes $x \in K^\times$ gilt, dass $x \in R$ oder $x^{-1} \in R$. Sei R ein Bewertungsring mit $\mathrm{Quot}(R) = K$. Zeigen Sie:

a) R ist lokal mit maximalem Ideal $\{x \in K^\times : x^{-1} \notin R\} \cup \{0\}$.
b) R ist ganzabgeschlossen.
c) Genau dann ist R ein diskreter Bewertungsring, wenn R noethersch ist.

Abgabe: Donnerstag, 28. Juni 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.