Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 11

Aufgabe 41 (5 Punkte)
Ein integrer Ring R ist ein Dedekindring, wenn er (1) noethersch und (2) ganzabgeschlossen ist und (3) jedes nichttriviale Primideal maximal ist.

a) Geben Sie ein Beispiel für einen Dedekindring, der nicht faktoriell ist.
b) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der (1) und (2), aber nicht (3) erfüllt.
c) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring, der (1) und (3), aber nicht (2) erfüllt.
d) Zeigen Sie, dass der ganze Abschluss $\overline{\mathbb{Z}}$ von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{C}$ (der *Ring der ganzen algebraischen Zahlen*) (2) und (3), aber nicht (1) erfüllt.
e) Entscheiden Sie, ob $\overline{\mathbb{Z}}$ faktoriell ist.

Aufgabe 42 (4 Punkte)
Sei R ein Dedekindring mit $\mathrm{Quot}(R) = K$, seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ paarweise verschiedene nichttriviale Primideale von R, $x_1, \ldots, x_n \in R$ und $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie den *Approximationssatz*: Es gibt ein $x \in R$ mit $v_{\mathfrak{p}_i}(x - x_i) = e_i$ für alle i. *Hinweis: Chinesischer Restesatz.*

Aufgabe 43 (4 Punkte)
Sei R ein Dedekindring, $\mathfrak{a}$ ein Ideal von R und $0 \neq a \in \mathfrak{a}$. Zeigen Sie, dass es ein $b \in \mathfrak{a}$ gibt mit $\mathfrak{a} = (a, b)$. *Hinweis: Aufgabe 42.*

Aufgabe 44 (5 Punkte)
Sei K ein Zahlkörper vom Grad n. Es sei $\mathcal{S}_\infty = \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ und zu $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_\infty$ sei $|\cdot|_\mathfrak{p}$ die induzierte unendliche Stelle. Weiter sei $\mathcal{S}_0$ die Menge der nichttrivialen Primideale von $\mathcal{O}_K$ und $N(\mathfrak{p}) := (\mathcal{O}_K : \mathfrak{p})$ die *Norm* von $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}_0$. Die zu $\mathfrak{p}$ gehörige *endliche Stelle* ist definiert durch $|x|_\mathfrak{p} := N(\mathfrak{p})^{-v_\mathfrak{p}(x)}$. Sei nun $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \cup \mathcal{S}_\infty$. Man kann zeigen: Für jedes $x \in K^\times$ ist $|x|_\mathfrak{p} = 1$ für fast alle $\mathfrak{p} \in \mathcal{S}$ und es gilt die *Produktformel*

$$\prod_{\mathfrak{p} \in \mathcal{S}} |x|_\mathfrak{p} = 1.$$

a) Zeigen Sie mit der Produktformel: Ist $x \in \mathcal{O}_K \smallsetminus \mathcal{O}_K^\times$, so gibt es $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \mathbb{C})$ mit $|\sigma(x)| \geq \sqrt[n]{2}$.
b) Beweisen Sie nun a) ohne Verwendung der Produktformel.
c) Beweisen Sie die Produktformel im Fall $K = \mathbb{Q}$.
d) Beweisen Sie die Produktformel im Fall $K = \mathbb{Q}(i)$. *Hinweis: Aufgabe 6 und Aufgabe 16*

Abgabe: Donnerstag, 5. Juli 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.