Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 12

Aufgabe 45 (4 Punkte)
Sei $1 \neq d \in \mathbb{Z}$ quadratfrei mit $d \equiv 1 \mod 4$, sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ und sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

a) Gilt $p|d$, so verzweigt p in K.
b) Gilt $p = 2$, so ist p zerlegt falls $d \equiv 1 \mod 8$ und träge falls $d \equiv 5 \mod 8$.
c) Gilt $p \nmid 2d$, so ist p zerlegt falls $\left(\frac{d}{p}\right) = 1$ und träge falls $\left(\frac{d}{p}\right) = -1$.
d) Das Element $p = 17$ ist prim in $\mathbb{Z}[\sqrt{31}]$.

Aufgabe 46 (4 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 + \alpha^2 - 2\alpha + 8 = 0$ und $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

a) $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\alpha, \beta]$ mit $\beta = \frac{1}{2}(\alpha^2 + \alpha)$.
b) $\mathcal{O}_K/2\mathcal{O}_K$ ist als Ring isomorph zu $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
c) Es gibt kein γ mit $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\gamma]$.

Hinweis zur b): Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\alpha + \mathbb{Z}\beta$, und bestimmen Sie die Produkte xy mod 2 für $x, y \in \{\alpha, \alpha + \beta, 1 + \beta\}$.

Aufgabe 47 (4 Punkte)
Sei K ein Zahlkörper. Wir werden zeigen: Die Klassengruppe $\mathcal{C}\ell_K = \mathcal{C}\ell(\mathcal{O}_K)$ ist endlich. Folgern Sie, dass es ein $0 \neq a \in \mathcal{O}_K$ gibt, so dass $\mathcal{O}_K[\frac{1}{a}]$ ein Hauptidealring ist.

Aufgabe 48 (6 Punkte)
Seien $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^3 = y^2 + 2$. Benutzen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ein Hauptidealring ist (Aufgabe 7) und zeigen Sie:

a) Die Elemente $y + \sqrt{-2}$ und $y - \sqrt{-2}$ sind in $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ teilerfremd.
b) Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ mit $\alpha^3 = y + \sqrt{-2}$.
c) Die Gleichung $Y^2 = X^3 - 2$ hat in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ nur zwei Lösungen.

Angenommen, es gäbe $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x^3 = y^2 + 5$. Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist kein Hauptidealring, doch wir werden sehen: Die Klassengruppe $\mathcal{C}\ell_{\mathbb{Q}(\sqrt{-5})} = \mathcal{C}\ell(\mathbb{Z}[\sqrt{-5}])$ hat Ordnung 2. Benutzen Sie dies, um zu zeigen:

d) Die Ideale $(y + \sqrt{-5})$ und $(y - \sqrt{-5})$ sind in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ teilerfremd.
e) Es gibt ein Hauptideal $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ mit $\mathfrak{a}^3 = (y + \sqrt{-5})$.
f) Die Gleichung $Y^2 = X^3 - 5$ hat keine Lösung in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Abgabe: Donnerstag, 12. Juli 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.