Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 13

Aufgabe 49
Sei K ein Zahlkörper und $j : K \to K_{\mathbb{R}}$ die Einbettung in seinen Minkowskiraum. Zeigen Sie:

a) Genau dann ist $\{x \in K_{\mathbb{R}} : |N(x)| \leq 1\}$ kompakt, wenn $K = \mathbb{Q}$ oder $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei.
b) Für $n \in \mathbb{N}$ ist $j(\mathcal{O}_K[\frac{1}{n}])$ dicht in $K_{\mathbb{R}}$.

Aufgabe 50
Zeigen Sie, dass $h_K = 1$ für $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ mit $d \in \{19, 43, 67, 163\}$.

Aufgabe 51
Sei $K = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$.
Hinweis: Benutzen Sie Aufgabe 37.

Aufgabe 52
Sei $f_1 = X^3 + 10X + 1$ und $f_2 = X^3 - 8X + 15$. Für $i = 1, 2$ sei α_i eine Nullstelle von f_i und $K_i = \mathbb{Q}(\alpha_i)$. Zeigen Sie:

a) K_1 und K_2 sind Zahlkörper vom Grad 3.
b) $\mathcal{O}_{K_1} = \mathbb{Z}[\alpha_1]$ und $\mathcal{O}_{K_2} = \mathbb{Z}[\alpha_2]$
c) $\Delta_{K_1} = \Delta_{K_2}$
d) $K_1 \not\cong K_2$

Hinweis zu d): Bestimmen Sie die Zerlegung der Primzahl 17 *in* K_1 *und in* K_2.

Musterlösung folgt.