Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 2

Aufgabe 5 (2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Lücken zwischen aufeinanderfolgenden Primzahlen beliebig groß werden: Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass keine der Zahlen

$$m, m+1, m+2, \ldots, m+n$$

prim ist.

Aufgabe 6 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Primelemente des Rings $\mathbb{Z}[i]$ der Gaußschen Zahlen bis auf Assoziiertheit genau die folgenden sind:

(1) $1+i$,
(2) $a+bi$, wobei $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^2+b^2=p$ Primzahl, $p \equiv 1 \bmod 4$,
(3) $p \in \mathbb{N}$ Primzahl mit $p \equiv 3 \bmod 4$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ ist euklidisch und $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]^\times$ ist endlich.
b) Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ ist euklidisch und $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ ist unendlich.

Aufgabe 8
Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne λ das Lebesgue-Maß auf $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie:

a) Sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$ und ist

$$P = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \mu_k a_k : 0 \leq \mu_k \leq 1 \text{ für } k = 1, \ldots, n \right\},$$

so ist $\lambda(P) = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$.

b) Ist φ ein Endomorphismus des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ und ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ Lebesgue-meßbar, so ist $\lambda(\varphi(X)) = |\det(\varphi)| \cdot \lambda(X)$.

Abgabe: Donnerstag, 3. Mai 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.