Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 3

Aufgabe 9 (4 Punkte)
Sei $R = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ und sei $P = \{a + b\sqrt{2} \in R^\times : a, b > 0\}$.

a) Bestimmen Sie z^{-1} für $z \in R^\times$ und folgern Sie, dass $P = \{z \in R^\times : z > 1\}$.
b) Seien $z = a + b\sqrt{2}, z' = a' + b'\sqrt{2} \in P$. Zeigen Sie, dass $z \leq z'$ genau dann, wenn $a \leq a'$.
c) Folgern Sie, dass $R^\times = \big\{\pm(1+\sqrt{2})^n : n \in \mathbb{Z}\big\}$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)
Sei $p > 2$ eine ungerade Primzahl.

a) Sei $\zeta_8 \in \overline{\mathbb{F}}_p$ eine primitive 8-te Einheitswurzel und $S = \zeta_8 + \zeta_8^{-1}$. Zeigen Sie, dass $S^2 = 2$.
b) Beweisen Sie den 2. Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz:

$$\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}} = \begin{cases} +1 & \text{falls } p \equiv \pm 1 \bmod 8 \\ -1 & \text{falls } p \equiv \pm 3 \bmod 8 \end{cases} .$$

Aufgabe 11 (3 Punkte)

a) Beweisen Sie den Homomorphiesatz für Moduln (II.1.5).
b) Formulieren und beweisen Sie den 1. und 2. Isomorphiesatz für Moduln (analog zu B3.III.1.8/9).

Aufgabe 12
Lesen und verstehen Sie den Struktursatz für endlich erzeugte abelsche Gruppen (B3.III.2.4). Überlegen Sie, wie eine Verallgemeinerung für endlich erzeugte Moduln aussehen könnte. Geben Sie ein Beispiel einer (nicht endlich erzeugten) abelschen Gruppe, die keine Darstellung als (unendliche) direkte Summe wie im Struktursatz erlaubt.

Abgabe: Donnerstag, 10. Mai 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.