Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 4

Aufgabe 13 (4 Punkte)
Es seien M, N, V Moduln über einem Ring R. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ ist auf natürliche Weise ein R-Modul.

b) Es gibt einen natürlichen R-Modul-Isomorphismus
$$\mathrm{Hom}_R(R, N) \cong N.$$

c) Es gibt einen natürlichen R-Modul-Isomorphismus
$$\mathrm{Hom}_R(M \oplus N, V) \cong \mathrm{Hom}_R(M, V) \oplus \mathrm{Hom}_R(N, V).$$

Aufgabe 14 (4 Punkte)
Sei R ein Ring. Zeigen Sie:

a) Ist jeder Untermodul eines freien R-Moduls selbst frei, so ist R ein Hauptidealring.

b) Ist R ein Hauptidealring und M ein R-Modul, der von n Elementen erzeugt wird, so wird auch jeder Untermodul N von M von n Elementen erzeugt.

Aufgabe 15 (2 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel für einen Hauptidealring R und einen torsionsfreien R-Modul, der nicht frei ist.

b) Geben Sie ein Beispiel für einen Ring R und einen endlich erzeugten R-Modul, der einen nicht endlich erzeugten Untermodul hat.

Aufgabe 16 (4 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ und $G = \mathbb{Z}^n$. Es sei $H = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ die von Elementen $a_1, \ldots, a_n \in G$ erzeugte Untergruppe und $d = |\det(a_1, \ldots, a_n)|$. Zeigen Sie: Ist $d = 0$, so ist $(G : H) = \infty$; ist $d \neq 0$, so ist $(G : H) = d$.

Abgabe: Mittwoch, 16. Mai 2012, 15 Uhr in die Briefkästen auf F4.