Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 5

Aufgabe 17 (4 Punkte)
Beweisen Sie folgende Variante des Struktursatzes für endlich erzeugte Moduln über Hauptidealringen: Ist M ein endlich erzeugter Modul über einem Hauptidealring R, so existieren bis auf Assoziiertheit eindeutig bestimmte $d_1, \ldots, d_n \in R$ mit $d_1 | d_2 | \ldots | d_n$, so dass

$$M \;\cong\; R/(d_1) \oplus \cdots \oplus R/(d_n).$$

Aufgabe 18 (4 Punkte)
Sei R ein Ring. Ein R-Modul M heißt **artinsch**, wenn jede absteigende Kette

$$N_1 \supseteq N_2 \supseteq \ldots$$

von Untermoduln von M stationär wird ("absteigende Kettenbedingung"). Der Ring R heißt artinsch, wenn er als R-Modul artinsch ist.

a) Sei N ein Untermodul von M. Zeigen Sie: Genau dann ist M artinsch, wenn sowohl N als auch M/N artinsch sind.
b) Zeigen Sie, dass jedes Primideal eines artinschen Rings maximal ist. Folgern Sie, dass ein integrer artinscher Ring ein Körper ist.
c) Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring, der nicht artinsch ist.

Die Symmetrie zwischen artinsch *und* noethersch *ist trügerisch: Im Kontrast zu c) kann man zeigen, dass jeder artinsche Ring noethersch ist!*

Aufgabe 19 (3 Punkte)

a) Geben Sie ein Beispiel für einen noetherschen Ring, der nicht faktoriell ist.
b) Geben Sie ein Beispiel für einen faktoriellen Ring, der nicht noethersch ist. (*Sie könnten zum Beispiel zeigen, dass* $\mathbb{Q}[X_1, X_2, \ldots]$ *die gewünschten Eigenschaften hat.*)

Aufgabe 20
Sei R ein Ring, $R[t]$ der Polynomring über R, M ein endlich erzeugter freier R-Modul mit Basis $x_1, \ldots, x_n$ und $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(M, M)$ ein Endomorphismus von M. Sei $A = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{Mat}_n(R)$ die darstellende Matrix von φ bezüglich $x_1, \ldots, x_n$, d.h. $\varphi(x_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, und sei $\chi_A(t) = \det(t\mathbb{I} - A) \in R[t]$ das charakteristische Polynom von A.

a) Der R-Modul M wird durch $tx := \varphi(x)$ zu einem $R[t]$-Modul.
b) Im $R[t]$-Modul M ist $\chi_A(t) x_i = 0$ für jedes i.
c) Im Ring $\mathrm{Mat}_n(R)$ ist $\chi_A(A) = 0$ (Satz von *Cayley-Hamilton* für Moduln).

Abgabe: Donnerstag, 24. Mai 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.