Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 7

Aufgabe 25 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Ringe ganzabgeschlossen sind:

a) $\mathbb{Z}[X]$
b) $\mathbb{Z}[X]/(X^2+4)$
c) $\mathbb{Z}[\sqrt{3}, \sqrt{5}]$
d) $\mathbb{Z}[\frac{1}{3}, \frac{1}{5}]$

Aufgabe 26 (3 Punkte)
Sei R ein ganzabgeschlossener Ring mit $K = \mathrm{Quot}(R)$, sei L/K eine endliche Erweiterung und sei $\alpha \in L$ ganz über R. Zeigen Sie:

a) $\mathrm{N}_{L/K}(\alpha) \in R$
b) Im Ring $R[\alpha]$ gilt $\alpha | \mathrm{N}_{L/K}(\alpha)$.

Aufgabe 27 (4 Punkte)
Sei L/K eine Erweiterung *endlicher* Körper. Zeigen Sie, dass die Normabbildung $\mathrm{N}_{L/K} : L \to K$ surjektiv ist.
Hinweis: Sie könnten benutzen, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/K)$ *von einer Potenz des Frobenius erzeugt wird, vgl. B3.IV.3.4.*

Aufgabe 28
Sei K ein Körper, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ und

$$V = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \ldots & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \alpha_n & \ldots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

die zugehörige Vandermonde-Matrix. Zeigen Sie, dass

$$\det(V) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j).$$

Abgabe: Mittwoch, 6. Juni 2012, 15 Uhr in die Briefkästen auf F4.