Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 8

Aufgabe 29 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $f = X^3 + aX + b \in K[X]$. Zeigen Sie, dass $\Delta_f = -4a^3 - 27b^2$.

Aufgabe 30 (4 Punkte)
Sei K ein Körper und $L = K(\alpha)$ eine endliche separable Erweiterung von K vom Grad n. Es bezeichne f' die Ableitung von $f = \mathrm{MinPol}(\alpha/K)$. Zeigen Sie, dass

$$\Delta_f = (-1)^{n(n-1)/2}\mathrm{N}_{L/K}(f'(\alpha)).$$

Aufgabe 31 (4 Punkte)
Sei G eine Gruppe und K ein Körper. Abbildungen $f_1, \ldots, f_n : G \to K$ heißen *linear unabhängig*, wenn für $a_1, \ldots, a_n \in K$ aus $a_1 f_1(g) + \cdots + a_n f_n(g) = 0$ für alle $g \in G$ schon $a_1 = \cdots = a_n = 0$ folgt. Beweisen Sie *Artins Satz von der Unabhängigkeit der Charaktere*: Sind $\chi_1, \ldots, \chi_n : G \to K^\times$ paarweise verschiedene Gruppenhomomorphismen, so sind $\chi_1, \ldots, \chi_n$ linear unabhängig.

Hinweis: Führen Sie eine Induktion nach n durch und konstruieren Sie aus einer nicht-trivialen linearen Relation $a_1\chi_1 + \cdots + a_n\chi_n = 0$ eine weitere, davon unabhängige.

Aufgabe 32 (4 Punkte)
Benutzen Sie den Satz von der Unabhängigkeit der Charaktere (Aufgabe 31), um folgendes zu beweisen:

a) Die Spurform einer endlichen separablen Erweiterung L/K ist nicht-ausgeartet.
b) Sind $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}^\times$ paarweise verschieden und sind $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}^\times$, so gibt es $k \in \mathbb{Z}$ mit $a_1\alpha_1^k + \cdots + a_n\alpha_n^k \neq 0$.

Abgabe: Donnerstag, 14. Juni 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.