Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 9

Aufgabe 33 (4 Punkte)
Sei K ein Zahlkörper.

a) Sei $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ein Ideal und sei $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K$ das von $\mathfrak{a}$ in $\mathcal{O}_K$ erzeugte Ideal. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}\mathcal{O}_K \cap \mathbb{Q} = \mathfrak{a}$.
b) Sei Γ ein Gitter in K. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $k\Gamma \subseteq \mathcal{O}_K$.
c) Sei R eine Ordnung von K. Zeigen Sie, dass es ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $k\mathcal{O}_K \subseteq R$.

Aufgabe 34 (3 Punkte)

a) Sei $d < 0$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Bestimmen Sie $\mathcal{O}_K^\times$.
b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}[\sqrt{12}]$ und $\mathbb{Z}[\sqrt{13}]$ nicht faktoriell sind.

Aufgabe 35 (4 Punkte)
Sei $d \neq 1$ quadratfrei und $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$. Zeigen Sie: Die Ordnungen von K sind genau die $R_m := \mathbb{Z} + m\mathcal{O}_K$ für $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 36 (5 Punkte)
Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - \alpha + 3 = 0$ und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, $R = \mathbb{Z}[\alpha]$.

a) Zeigen Sie: K ist ein Zahlkörper vom Grad 3 und R ist eine Ordnung von K.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{Sp}(\alpha^i)$ für $i = 0, \ldots, 4$.
c) Zeigen Sie, dass $\Delta(R) = -239$.
d) Folgern Sie, dass $\mathcal{O}_K = R$.
e) Bestimmen Sie die Anzahl r_1 der reellen Einbettungen von K.

Abgabe: Donnerstag, 21. Juni 2012, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.