Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Aaron Kunert
SS 2012

Übungen zur Vorlesung Zahlentheorie

Blatt 13

Aufgabe 49

a) Für einen Zahlkörper K setzen wir $S_K := \{x \in K_{\mathbb{R}} : |N(x)| \leq 1\}$. Für $K = \mathbb{Q}$ ist $K_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ und N ist die euklidische Norm auf $\mathbb{R}$, daher ist $S_K = [-1, 1]$ eine kompakte Menge. Für $d \in \mathbb{N}$ quadratfrei hat $\mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ keine reelle Einbettung und genau ein Paar komplexer Einbettungen. Also ist $K = \mathbb{C}$ und N ist die euklidische Norm auf $\mathbb{C}$. Daher ist S_K die Einheitsscheibe im $\mathbb{R}^2$ und somit kompakt.

Sei nun K ein beliebiger Zahlkörper und bezeichne r_1 die Anzahl reeller Einbettungen und r_2 die Anzahl der Paare komplex konjugierter Einbettungen. Angenommen $r_1 + r_2 \geq 2$, so kann S_K nicht kompakt sein, denn die Gerade

$$\{(t, 0, \ldots, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

liegt in S_K. Also ist $(r_1, r_2) = (1, 0)$ oder $(r_1, r_2) = (0, 1)$. Im ersten Fall ist $[K : \mathbb{Q}] = 1$ also $K = \mathbb{Q}$, im zweiten Fall ist $[K : \mathbb{Q}] = 2$, also K ein quadratischer Zahlkörper mit einer komplexen Einbettung. Dann muss jedoch $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-d})$ für ein $d \in \mathbb{N}$ sein.

b) Sei $m \in \mathbb{N}$ mit $K_{\mathbb{R}} \cong \mathbb{R}^m$. Wir identifizieren $K_{\mathbb{R}}$ mit dem $\mathbb{R}^m$. Insbesondere ist $j \colon K \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathbb{Q}$–lineare Abbildung. Nach Satz V.2.7 ist $j(\mathcal{O}_K)$ ein vollständiges Gitter im $\mathbb{R}^m$. Sei $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{O}_K$ eine Ganzheitsbasis. Dann ist $j(a_1), \ldots, j(a_m)$ eine Basis des $\mathbb{R}^m$. Wir setzen

$$D := \max(|j(a_1)|, \ldots, |j(a_m)|).$$

Sei nun $x \in \mathbb{R}^m$ und $\epsilon > 0$ vorgegeben. Dann gibt es $\mu_1, \ldots, \mu_m \in \mathbb{R}$ mit $x = \sum_{i=1}^m \mu_i j(a_i)$. Wähle nun $\lambda_i \in \mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ mit $|\lambda_i - \mu_i| < \frac{\epsilon}{mD}$. Setze $y =$

$\sum_{i=1}^m \lambda_i j(a_i)$. Es ist $y = j(\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i) \in j(\mathcal{O}_K)$. Weiter ist

$$\begin{aligned}
|x-y| &= \left|\sum_{i=1}^m (\lambda_i - \mu_i) j(a_i)\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^m |(\lambda_i - \mu_i) j(a_i)| \\
&\leq \sum_{i=1}^m |(\lambda_i - \mu_i)||j(a_i)| \\
&< \sum_{i=1}^m \frac{\epsilon}{Dm} |j(a_i)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{Dm} \sum_{i=1}^m |j(a_i)| \\
&\leq \frac{\epsilon}{Dm} \sum_{i=1}^m D \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass $j(\mathcal{O}_K[\frac{1}{n}])$ dicht in $\mathbb{R}^m$ liegt.

Aufgabe 50

Erinnerung:
Nach Satz V.4.10 enthält jede Idealklasse $[\mathfrak{a}]$ eines imaginärquadratischen Zahlkörpers K einen Vertreter $\mathfrak{a}_1$ mit

$$N(\mathfrak{a}_1) \leq \frac{2}{\pi}\sqrt{|\Delta_K|}.$$

Daher genügt es zu zeigen, dass jedes Ideal mit Idealnorm unterhalb dieser Schranke ein Hauptideal ist.

- d=19
  Es ist $|\Delta_K| = 19$, und obige Schranke ist $\frac{2}{\pi}\sqrt{19} \approx 2.77 < 3$, daher genügt es Ideale mit Norm 2 zu untersuchen. Die einzigen nichttrivialen Ideale, die Norm höchstens 2 haben können, sind die Primideale, die über (2) liegen. Es ist $-19 \equiv 5 \pmod 8$ daher ist $\left(\frac{-19}{2}\right) = -1$ und 2 ist träge in K (vgl. Aufgabe 45). Also gibt es kein Nichthauptideal von Norm kleiner 3.
- d=43 Es ist $|\Delta_K| = 43$, und obige Schranke ist $\frac{2}{\pi}\sqrt{43} \approx 4.17 < 5$, daher genügt es Ideale mit Norm $2, 3$ und 4 zu untersuchen. Wie oben genügt es die Primzahlen 2 und 3 zu untersuchen. Es ist $-44 \equiv 5 \pmod 8$, daher ist $\left(\frac{-44}{2}\right) = -1$. Weiter ist $\left(\frac{-44}{3}\right) = -1$, also sind 2 und 3 träge. Insbesondere gibt es nur ein nichttriviales Ideal von Norm kleiner 5, nämlich das Primideal (2). Dies ist jedoch ein Hauptideal. Also hat K die Klassenzahl 1.
- d=67 Es ist $|\Delta_K| = 67$, und obige Schranke ist $\frac{2}{\pi}\sqrt{67} \approx 5.21 < 6$, daher genügt es Ideale mit Norm $2, 3, 4$ und 5 zu untersuchen. Wir untersuchen die Primzahlen $2, 3$ und 5. Es ist $-67 \equiv 5 \pmod 8$, daher ist $\left(\frac{-67}{2}\right) = -1$. Weiter ist $\left(\frac{-67}{3}\right) = -1$, sowie $\left(\frac{-67}{5}\right) = -1$ also sind 2, 3 und 5 träge. Wie oben gibt es nur ein nichttriviales Ideal von Norm kleiner 6, nämlich das Primideal (2). Dies ist jedoch ein Hauptideal. Also hat K die Klassenzahl 1.
- d=163 Es ist $|\Delta_K| = 163$, und obige Schranke ist $\frac{2}{\pi}\sqrt{163} \approx 8.13 < 9$. Wir untersuchen die Primzahlen $2, 3, 5$ und 7. Es ist $-163 \equiv 5 \pmod 8$, daher ist $\left(\frac{-163}{2}\right) = -1$. Weiter ist $\left(\frac{-163}{3}\right) = -1$, sowie $\left(\frac{-163}{5}\right) = -1$ und $\left(\frac{-163}{7}\right) = -1$ also sind 2,3,5 und 7 träge. Wie oben gibt es nur ein nichttriviales Ideal von Norm kleiner 9, nämlich das Primideal (2). Dies ist jedoch ein Hauptideal. Also hat K die Klassenzahl 1.

Aufgabe 51

Wir bestimmen zunächst die Diskriminante von $R := \mathbb{Z}[\sqrt[3]{2}]$. Das Minimalpolynom von $\sqrt[3]{2}$ ist $X^3 - 2$. Aus Aufgabe 29 zusammen mit Satz II.7.7 folgt $\Delta(R) = -108 = -2^2 \cdot 3^2 \cdot 3$. Das Polynom $X^3 - 2$ hat eine reelle und zwei komplexe Nullstellen, daher hat K eine reelle und ein paar Paar komplexer Einbettungen. Es ist also $r_1 = r_2 = 1$. Daher gilt aufgrund der Minkowskischranke (Satz V.3.3) die Abschätzung

$$|\Delta_K| \geq \left(\frac{9\pi}{8}\right)^2 \approx 12.5$$

Daher ist $|\Delta_K| \geq 13$. Da $(\mathcal{O}_K : R)^2 = \frac{\Delta(R)}{\Delta_K}$ eine Quadratzahl ist, muss

$$\Delta_K \in \{-27, -12, -3, -108\}$$

sein. Dabei fallen die Möglichkeiten $\Delta_K = -12$ und $\Delta_K = -3$ aufgrund der Minkowskischranke weg. Die Möglichkeit $\Delta_K = -27$ ist ebenfalls nicht möglich, da dann der Index $(\mathcal{O}_K R : R)$ durch 3 teilbar wäre, was Aufgabe 37 widerspricht. Also ist $\Delta_K = -108$ und R ist schon der Ganzheitsring.

Aufgabe 52

Sei $f_1 = X^3 + 10X + 1$ und $f_2 = X^3 - 8X + 15$. Weiter seien α_i und K_i für $i = 1, 2$ wie in der Aufgabe definiert.

Zunächst zeigen wir, dass f_1 und f_2 irreduzibel sind, womit Aufgabenteil a) folgt. Um zu sehen, dass f_1 irreduzibel ist, kann man es modulo 13 betrachten. Durch Rechnerei erkennt man, dass f_1 modulo 13 keine Nullstellen hat und somit irreduzibel ist. Alternativ kann man auch zeigen, dass f_1 keine weiteren rationalen Nullstellen hat. Hätte f_1 rationale Nullstellen, so müssten diese nach dem Gausslemma schon ganzzahlig und daher ein Teiler von 1 sein. Analog argumentiert man für f_2 (auch hier führt eine Betrachtung modulo 13 zum Erfolg).

Nach Aufgabe 29 ist die Diskriminante von f_1 bzw. f_2 gleich -4027. Dies ist eine Primzahl, woraus sowohl Teil b) als auch Teil c) folgen.

Um zu zeigen, dass $K_1 \ncong K_2$ ist, untersuchen wir das Zerlegungsverhalten der Primzahl 17. Zunächst betrachen wir f_1 modulo 17. Eine lange Rechnung zeigt, dass f_1 modulo 17 keine Nullstellen besitzt. Also ist 17 träge in K_1. Nun betrachten wir f_2 modulo 17. Es ist $10^3 - 8 \cdot 10 + 15 = 935 = 55 \cdot 17$. Also ist 10 eine Nullstelle von f_2 modulo 17. Insbesondere ist damit 17 nicht träge in K_2. Dies zeigt, dass beide Zahlkörper nicht isomorph sind.