Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 12

Abgabe: Montag, 23. Januar 2012, in der Vorlesung

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 45
Sei M eine abgeschlossene und beschränkte semialgebraische Teilmenge von R^n, und sei $f\colon M \to M$ eine definierbare Abbildung mit $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ für alle x, $y \in M$ mit $x \neq y$. Dann hat f einen Fixpunkt.

Aufgabe 46
Eine semialgebraische Teilmenge $M \subseteq R^n$ ist genau dann abgeschlossen und beschränkt, wenn für jeden abgeschlossenen Punkt α von $\widetilde{M}$ gilt: Die Erweiterung $R \subseteq R(\alpha)$ ist archimedisch. Für $R = \mathbb{R}$ ist auch äquivalent: $(\widetilde{M})^{\max} = M$.

Aufgabe 47
Sei V eine R-Varietät. Für $\alpha \in \widetilde{V(R)}$ ist die *Dimension* von α definiert als

$$\dim(\alpha) \;:=\; \min\bigl\{\dim(S)\colon S \subseteq V(R) \text{ semialgebraisch},\; \alpha \in \widetilde{S}\bigr\}.$$

Sei $M \subseteq V(R)$ eine semialgebraische Teilmenge.

(a) Ist V affin, so ist $\dim(\alpha) = \dim\bigl(R[V]/\mathrm{supp}(\alpha)\bigr)$.
(b) $\dim(M) = \sup\{\dim(\alpha)\colon \alpha \in \widetilde{M}\}$.
(c) Für α, $\beta \in \widetilde{M}$ mit $\alpha \rightsquigarrow \beta$ und $\alpha \neq \beta$ ist $\dim(\alpha) > \dim(\beta)$.
(d) Ist $f\colon M \to N$ eine definierbare Abbildung, so gilt $\dim \widetilde{f}(\alpha) \leq \dim(\alpha)$ für alle $\alpha \in \widetilde{M}$.

Aufgabe 48
Sei M eine nichtleere semialgebraische Menge im R^n. Dann gilt $\dim(M) = \dim(\overline{M})$ und $\dim(\overline{M} \setminus M) < \dim(M)$. (*Hinweis:* Man benutze das reelle Spektrum.)