Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 13

Abgabe: Montag, 30. Januar 2012, in der Vorlesung

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 49

Zeige die folgende Ergänzung zu Thoms Lemma: Seien $0 \neq f_1, \dots, f_r \in R[t]$ mit $df_i/dt \in \{f_1, \dots, f_r\} \cup R$ für $i = 1, \dots, r$. Sei $e \in \{-1, 0, 1\}^r$ mit $S(e) = \varnothing$. Dann ist $|S(\overline{e})| \leq 1$. (Bezeichnungen wie in der Vorlesung.)

Aufgabe 50

Sei $M \subseteq R^n$ eine semialgebraische Menge, sei $y \in \overline{M}$ und $M_1 := M \cup \{y\}$. Sei $f\colon M \to R$ eine beschränkte semialgebraische Abbildung, sei $G := \mathrm{Graph}(f)$.

(a) Die Menge $L := \{t \in R\colon (y, t) \in \overline{G}\}$ ist semialgebraisch und nicht leer.

(b) Genau dann hat f eine stetige Fortsetzung f_1 auf M_1, wenn $|L| = 1$ ist, und alsdann ist $L = \{f_1(y)\}$.

Aufgabe 51

Seien $M \subseteq R^n$ eine semialgebraische Menge, mit Abschluß $\overline{M}$. Seien f, $g\colon \overline{M} \to R$ s.a. Funktionen mit $f < g$ auf M, und sei $S := \mathrm{Band}(f|_M, g|_M) \subseteq M \times R$.

(a) $\overline{S} = \{(x, t) \in \overline{M} \times R\colon f(x) \leq t \leq g(x)\}$ $\ (= \overline{\mathrm{Band}}(f, g))$.

(b) Das Paar $(\overline{M}, M)$ habe folgende Eigenschaft: Für jedes $x \in \overline{M}$ gibt es beliebig kleine semialgebraische Umgebungen U, für die $U \cap M$ s.a. zusammenhängend ist. Dann hat das Paar $(\overline{S}, S)$ die analoge Eigenschaft.

Aufgabe 52

Sei $M \subseteq R^n$ eine semialgebraische Menge. Für $d \geq 0$ sei

$$M_{(d)} \ := \ \{x \in R^n\colon \ \dim_x(M) = d\}.$$

Die Menge $M_{(d)}$ ist semialgebraisch und rein d-dimensional, d.h. $\dim_x(M_{(d)}) = d$ gilt für jedes $x \in M_{(d)}$.