Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 2

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2011, in der Vorlesung

Aufgabe 5
Sei (K, P) ein angeordneter Körper. Sei $\mathcal{T} = \mathcal{T}_P$ die Topologie auf K, welche alle offenen Intervalle $]a, b[_P$ $(a,\ b \in K)$ als Basis offener Mengen hat. Man zeige, daß $(K, \mathcal{T})$ ein topologischer Körper ist, d.h. daß Addition und Multiplikation (als Abbildungen $K \times K \to K$) und Inversion (als Abbildung $K^* \to K^*$) stetig sind.

Aufgabe 6
Sei (K, P) ein angeordneter Körper, und sei $\mathcal{T}_P$ seine Ordnungstopologie (Aufgabe 5). Ist $K \neq \mathbb{R}$, so ist der topologische Raum $(K, \mathcal{T}_P)$ total unzusammenhängend.

Aufgabe 7
Betrachte das Polynom
$$f = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$
in $\mathbb{R}[x, y]$.
(a) $f(x, y) \geq 0$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) f ist nicht Summe von Quadraten in $\mathbb{R}[x, y]$.

Hinweise: Für (a) wende man die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel auf drei geeignete Zahlen an. In (b) mache man einen Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten und führe ihn zu einem Widerspruch.

Aufgabe 8
Betrachte das Polynom $f = t^5 + at^2 + b$ mit $a,\ b \in \mathbb{R}$. Die Diskriminante von f ist $D = b\,(3125\,b^3 + 108\,a^5)$ (das braucht nicht bewiesen zu werden). Es sei $D \neq 0$. Bestimme die Anzahl der reellen Nullstellen von f. (Die Antwort hängt nur von D ab.)