



Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 3

Abgabe: Montag, 7. November 2011, in der Vorlesung

Aufgabe 9

Sei K ein Körper und $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n \in K[t]$ ein normiertes Polynom vom Grad $n \geq 1$. Seien $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ die Wurzeln von f in \overline{K} , und sei $w_k = w_k(f) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k$ die k -te Newtonsche Summe ($k \geq 0$).

(a) Zeige die *Newtonsche Identität*

$$w_k + w_{k-1} a_1 + w_{k-2} a_2 + \dots + w_1 a_{k-1} + k a_k = 0$$

für alle $k \geq 0$. (Hierbei werde $a_k := 0$ für $k > n$ gesetzt.)

(b) Die $w_k(f)$ sind die Koeffizienten der Entwicklung von $\frac{t'}{f}$ um ∞ :

$$\frac{f'}{f} = \frac{w_0}{t} + \frac{w_1}{t^2} + \frac{w_2}{t^3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w_k}{t^{k+1}}.$$

Aufgabe 10

Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei $f = t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_n$ ein normiertes Polynom in $R[t]$, dessen Nullstellen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ alle reell sind. Dann gilt:

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (-1)^i a_i \geq 0 \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Aufgabe 11

Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^3 - 5\alpha + 1 = 0$. Wie viele Anordnungen hat der Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$, bei denen $\alpha^2 > 3$ ist? (Gib die Antwort mit Hilfe eines der Verfahren von Sturm oder Hermite.)

Aufgabe 12

Sei $(K, P) \subseteq (L, Q)$ eine endliche Erweiterung angeordneter Körper (d.h. es gelte $Q \cap K = P$).

- (a) Die Erweiterung ist archimedisch, d.h. für alle $b \in L$ existiert ein $a \in K$ mit $b \leq_Q a$.
- (b) Im allgemeinen ist K nicht dicht in L bezüglich der Ordnungstopologie von Q . Zeige dies am Beispiel $L = \mathbb{R}(t)$ und $K = \mathbb{R}(t^2)$ mit $0 <_Q nt <_Q 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis zu (b): Es gibt kein $f \in K$ mit $t < f < 2t$.