Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 4

Abgabe: Montag, 14. November 2011, in der Vorlesung

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 13

Sei $f(t) \in R[t]$, und sei r die (mit Vielfachheiten genommene) Anzahl der nichtreellen Nullstellen von f. Die (von Gauß stammende) *Hawaii-Vermutung* besagt, daß die Ableitung der logarithmischen Ableitung von f, also

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{f'}{f}\right) = \frac{ff'' - f'^2}{f^2},$$

höchstens r reelle Nullstellen (gezählt mit Vielfachheiten) hat.

Beweise die Hawaii-Vermutung im Fall, wo alle Nullstellen von f reell sind.

Aufgabe 14

Sei $\xi = (U, O)$ ein Dedekindschnitt von R. Wir setzen

$$P_\xi := \Big\{f \in R(t) \colon \exists\, a \in U \cup \{-\infty\}\ \exists\, b \in O \cup \{\infty\}\ \forall\, x \in\,]a, b[\ \ f(x) \geq 0\Big\}.$$

(Hierbei bedeutet $f(x) \geq 0$ insbesondere, daß f in x keinen Pol hat.)

(a) P_ξ ist eine Anordnung von $R(t)$.
(b) Jede Anordnung von $R(t)$ ist von der Form P_ξ für genau einen Dedekindschnitt ξ von R.
(c) Genau dann ist $\big(R(t), P_\xi\big)$ über R archimedisch, wenn der Dedekindschnitt ξ frei ist.

Aufgabe 15

Sei (K, P) ein angeordneter Körper mit reellem Abschluß R, sei $f \in K[x_1, \dots, x_n]$. Dann sind äquivalent:

(i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in R^n$;
(ii) für jede Fortsetzung Q der Anordnung P auf $K(x_1, \dots, x_n)$ ist $f \geq_Q 0$.

Aufgabe 16

Finde eine Darstellung des Motzkin-Polynoms

$$f = x^4y^2 + x^2y^4 - 3x^2y^2 + 1$$

als Summe von vier Quadraten rationaler Funktionen in $\mathbb{R}(x, y)$. (*Hinweis:* Erweitere mit $1 + x^2$.)