Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 5

Abgabe: Montag, 21. November 2011, in der Vorlesung

Sei R stets ein reell abgeschlossener Körper.

Aufgabe 17

Sei $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ eine R-Formel, und sei $M = S_R(\varphi)$ die Erfüllungsmenge von φ in R^n. Gib explizite Formeln an, deren Erfüllungsmenge der Abschluß bzw. das Innere bzw. der Rand von M ist.

Aufgabe 18

Sei $f\colon R^n \to R^m$ die Abbildung $\xi \mapsto (f_1(\xi), \ldots, f_m(\xi))$ mit Polynomen $f_1, \ldots, f_m \in R[x_1, \ldots, x_n]$. Zeige, daß für jede abgeschlossene beschränkte semialgebraische Menge $S \subseteq R^n$ die Bildmenge $f(S)$ abgeschlossen und beschränkt in R^m ist.

Aufgabe 19

Sei $K = R(x, y)$ der rationale Funktionenkörper in zwei Variablen. Gib eine Anordnung P von K explizit an, welche

$$\operatorname{sign}_P(f) \;=\; \operatorname{sign} f(0,0)$$

für alle $f \in R[x, y]$ mit $f(0,0) \neq 0$ erfüllt.

Aufgabe 20

Sei k ein Körper, welcher nicht algebraisch abgeschlossen ist. Dann gibt es für jedes $n \geq 1$ ein nichtkonstantes homogenes Polynom $f_n \in k[x_1, \ldots, x_n]$ mit $f_n(a) \neq 0$ für alle $0 \neq a \in k^n$. (*Hinweis*: Induktion nach n.)