Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 6

Abgabe: Montag, 28. November 2011, in der Vorlesung

Aufgabe 21

Sei K ein Körper ($\mathrm{char}(K) \neq 2$), und sei $f \in K[t]$ ein normiertes irreduzibles Polynom. Genau dann ist der Körper $L = K[t]/(f)$ reell, wenn f keine Quadratsumme in $K(t)$ ist.

Aufgabe 22

Sei A ein Ring.

(a) Sei $P \subseteq A$ eine Teilmenge mit $P + P \subseteq P$, $PP \subseteq P$ und $P \cup (-P) = A$. Genau dann ist $\mathrm{supp}(P) := P \cap (-P)$ ein Primideal von A, wenn $-1 \notin P$ ist und für alle a, $b \in A$ gilt:
$$a \notin P \ \wedge \ b \notin P \ \Rightarrow \ -ab \notin P.$$

(b) Die Elemente $\alpha = (\mathfrak{p}, T)$ des reellen Spektrums von A stehen in natürlicher Bijektion zu den Positivkegeln von A (also den Teilmengen $P \subseteq A$, welche die Bedingungen aus (a) erfüllen).

Aufgabe 23

Sei $B = k[[x]]$ der Ring der formalen Potenzreihen in der Variable x über dem Körper k, und sei $\mathfrak{m} = Bx$ das maximale Ideal von B. Für jeden Positivkegel P von B ist auch $Q := P + \mathfrak{m}$ ein Positivkegel von B.

Aufgabe 24

(a) Sei $K \subseteq L$ eine Körpererweiterung, sei Q_0 eine Anordnung von L und P eine Anordnung von $K(t)$ mit $K \cap Q_0 = K \cap P$. Dann gibt es eine Anordnung Q von $L(t)$ mit $L \cap Q = Q_0$ und $K(t) \cap Q = P$.

(b) Sei k ein Körper, und seien R_1, R_2 zwei reell abgeschlossene Oberkörper von k mit $k \cap (R_1)_+ = k \cap (R_2)_+$. Dann gibt es einen reell abgeschlossenen Körper S zusammen mit k-Einbettungen $R_i \to S$ für $i = 1, 2$.