Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 7

Abgabe: Montag, 5. Dezember 2011, in der Vorlesung

Aufgabe 25
Sei A ein Ring. Jeden Homomorphismus $\varphi\colon A \to R$ in einen reell abgeschlossenen Körper R nennen wir ein A-*Modell*. Zum A-Modell φ definieren wir den Positivkegel $P_\varphi := \varphi^{-1}(R_+)$ von A. Man zeige, daß es zu jedem Positivkegel P von A ein A-Modell φ mit $P = P_\varphi$ gibt, und daß für je zwei A-Modelle $\varphi_i\colon A \to R_i$ $(i = 1, 2)$ die folgenden Eigenschaften äquivalent sind:

(i) Es gibt ein A-Modell $\varphi\colon A \to R$ und A-Homomorphismen $R \to R_i$ (für $i = 1, 2$);
(ii) es gibt ein A-Modell $\psi\colon A \to S$ und A-Homomorphismen $R_i \to S$ (für $i = 1, 2$);
(iii) $P_{\varphi_1} = P_{\varphi_2}$.

Hinweis: Verwende Aufgabe 24(b).

Aufgabe 26
Sei A ein Ring.

(a) $\dim \operatorname{Sper}(A) \le \dim(A)$. (Hierbei ist dim die Krulldimension.)
(b) Ist A ein regulärer lokaler Ring mit reellem Restklassenkörper, so gilt Gleichheit in (a).

Hinweis: Man beweise (b) durch Induktion nach $\dim(A)$.

Aufgabe 27
Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei V eine affine R-Varietät, und sei W der Zariskiabschluß von $V(R)$ in V.

(a) Das Verschwindungsideal von W in $R[V]$ ist gleich $\sqrt[\mathrm{re}]{(0)}$.
(b) $\dim \operatorname{Sper} R[V] = \dim(W)$.

In (b) verwende man Aufgabe 26(b).

Aufgabe 28
Sei X eine prokonstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$, und sei

$$\operatorname{Gen}(X) \;:=\; \left\{\beta \in \operatorname{Sper}(A)\colon X \cap \overline{\{\beta\}} \neq \varnothing\right\}$$

die Menge aller Generalisierungen von Elementen von X in $\operatorname{Sper}(A)$.

(a) Jede Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$ enthält eine konstruierbare solche Umgebung.
(b) Die Menge $\operatorname{Gen}(X)$ ist prokonstruierbar in $\operatorname{Sper}(A)$.
(c) Ist K eine konstruierbare Teilmenge von $\operatorname{Sper}(A)$ mit $\operatorname{Gen}(X) \subseteq K$, so enthält K eine Umgebung von X in $\operatorname{Sper}(A)$.