Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
C. Scheiderer
A. Kunert
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Reelle algebraische Geometrie I

Blatt 9

Abgabe: Montag, 19. Dezember 2011, in der Vorlesung

Aufgabe 33
Sei A ein semilokaler Ring, d.h. A habe nur endlich viele maximale Ideale. Dann ist der kompakte Raum $(\operatorname{Sper} A)^{\max}$ total unzusammenhängend. (*Hinweis:* Aufgabe 32)

Aufgabe 34
Sei R ein reell abgeschlossener Körper, sei $(M_i)_{i\in I}$ eine Familie von semialgebraischen Teilmengen von R^n. Dann sind äquivalent:

(i) Es gibt eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ mit $\bigcap_{j\in J} M_j = \varnothing$;
(ii) für jeden reell abgeschlossenen Oberkörper S von R ist $\bigcap_{i\in I} (M_i)_S = \varnothing$;
(iii) $\bigcap_{i\in I} \widetilde{M_i} = \varnothing$.

Dabei bezeichnet $(M_i)_S$ in (ii) die Grundkörpererweiterung der Menge M_i von R nach S.

Aufgabe 35
Seien nichtnegative ganze Zahlen n, r, d fixiert. Man zeige: Es gibt eine natürliche Zahl $N = N(n, r, d)$ derart, daß für jeden reell abgeschlossenen Körper R und jede Familie $f_1, \dots, f_r$ von Polynomen in $R[x_1, \dots, x_n]$ mit $\deg(f_i) \le d$ $(i = 1, \dots, r)$ gilt:

Gibt es zu jedem $\xi \in R^n$ ein $i \in \{1, \dots, r\}$ mit $f_i(\xi) < 0$, so gibt es Quadratsummen s_e $(e \in \{0,1\}^r)$ von Polynomen mit

$$-1 = \sum_{e\in\{0,1\}^r} s_e \cdot f_1^{e_1} \cdots f_r^{e_r} \qquad (*)$$

und mit $\deg(s_e) \le N$ für jeden Multiindex e.

Anleitung: Für $N \ge 1$ betrachte man die Menge X_N aller Tupel $(f_1, \dots, f_r)$ mit $\deg(f_i) \le d$, für die eine Identität $(*)$ mit $\deg(s_e) \le N$ existiert. Man zeige, daß die Mengen X_N und $\bigcup_N X_N$ semialgebraisch sind (in einem geeigneten endlichdimensionalen Vektorraum), und verwende dann Aufgabe 34. Man verwende weiter folgende Tatsache: Zu n, $k \in \mathbb{N}$ gibt es $p \in \mathbb{N}$ derart, daß für jeden reell abgeschlossenen Körper R und jede Quadratsumme $f \in R[x_1, \dots, x_n]$ mit $\deg(f) \le k$ gilt: f ist eine Summe von p Quadraten in $R[x_1, \dots, x_n]$.

Aufgabe 36
Sei V eine affine R-Varietät und M eine semialgebraische Teilmenge von $V(R)$. Genau dann ist M Zariski-dicht in V, wenn jedes minimale Primideal von $R[V]$ Träger eines Punktes in $\widetilde{M}$ ist.