Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

14. Februar 2012

Analysis I

Übungsklausur

Hinweis:

Wir empfehlen Ihnen, diese Testklausur unter möglichst realen Bedingungen zu bearbeiten, d.h., versuchen Sie, die Aufgaben ohne Verwendung von Hilfsmitteln zu lösen, und setzen Sie als Bearbeitungszeit 90 Minuten an.

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen sind wahr?

Jedes richtige Kreuz wird mit einem Punkt gewertet, jedes falsche Kreuz mit einem Minuspunkt. Wird bei einer Teilaufgabe kein Kreuz gesetzt, wird diese Teilaufgabe mit null Punkten bewertet. Insgesamt können bei dieser Aufgabe nicht weniger als null Punkte erreicht werden.

(*i*) Seien (X_i, d_i) $(i = 1, 2)$ metrische Räume und $f : X_1 \to X_2$.
f heißt stetig in $x_0 \in X_1$, falls

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in X_1 \text{ mit } d_1(x, x_0) < 2\delta : d_2(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

☐ wahr
☐ falsch

(*ii*) Eine nicht-konvergente Folge ist bestimmt divergent.

☐ wahr
☐ falsch

(*iii*) Ein Randpunkt einer Teilmenge eines metrischen Raums ist entweder ein Häufungspunkt oder ein isolierter Punkt dieser Menge.

☐ wahr
☐ falsch

(*iv*) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$ abgeschlossen. Dann kann $X \setminus A$ nicht abgeschlossen sein.

☐ wahr
☐ falsch

(*v*) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Falls $f^{-1}(U) \subset \mathbb{R}$ offen ist für alle offenen Mengen $U \subset \mathbb{R}$, so ist f stetig.

☐ wahr
☐ falsch

(*vi*) Die Funktion f mit

$$f(x) := \left(\frac{\frac{\sin^{3145}(x)}{1+x^2}}{e^{\cos(x)\sin(x)}} \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{N} x^{3150n} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\ln\left(\frac{1}{1234} + x^4\right)\right)}{k!}$$

ist für alle $N \in \mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ differenzierbar.

☐ wahr
☐ falsch

(*vii*) Ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, mit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, punktweise konvergent gegen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, so ist f stetig. ☐ wahr ☐ falsch

(*viii*) Die Funktion $f(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{array} \right\}$ $(x \in [-1,1])$ ist keine Regelfunktion. ☐ wahr ☐ falsch

Aufgabe 2 (8 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe. Achten Sie dabei auf Präzision.

(*i*) Norm.

(*ii*) Kompakte Menge.

Formulieren Sie die folgenden Sätze. Achten Sie dabei auf Präzision.

(*iii*) Mittelwertsatz der Integralrechnung.

(*iv*) Banachscher Fixpunktsatz.

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz. Sie dürfen die Konvergenzsätze aus der Vorlesung verwenden.

(*i*) $a_n := \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

(*ii*) $b_n := \frac{3n^2-5}{7n^3+2n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

(*i*) Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{\sqrt{2n+1}^{2n}}$.

(*ii*) Zeigen Sie, dass eine in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ konvergente Folge höchstens einen Grenzwert besitzen kann.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

(*i*) Zeigen Sie: Jedes $f \in C^1([a,b],\mathbb{R})$ ist lipschitzstetig.

(*ii*) Untersuchen Sie die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf Differenzierbarkeit.

$$f(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} 3x + x^2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) & , & x \neq 0 \\ 0 & , & x = 0 \end{array} \right. .$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden (bestimmten bzw. unbestimmten) Integrale.

(*i*) $\int \frac{e^x+1}{e^x-1} dx$.

(*ii*) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{2^n} \sin((2n+3)x)\, dx$.