Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Patrick Kurth

12. Januar 2012

Analysis I

10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Berechnen Sie folgendes unbestimmtes Integral.

$$\int \frac{1}{\cos(x)} dx.$$

Aufgabe 10.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} \sin((2n+1)x)$$

eine Regelfunktion ist und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

Aufgabe 10.3 Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{für } -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass eine Folge von Treppenfunktionen existiert, die gleichmäßig gegen f konvergiert und berechnen Sie

$$\int_{-1}^{1} f(x) dx.$$

Aufgabe 10.4 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Zeigen Sie, dass die Integralabbildung

$$\mathbb{I} : \mathcal{T}(I, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f \mapsto \int_{(a,b)} f$$

eine stetige lineare Abbildung in normierten Räumen ist.

Hinweis: Sie dürfen voraussetzen, dass der Raum der Treppenfunktionen $\mathcal{T}(I, \mathbb{R})$ mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ein normierter Vektorraum ist.

Abgabe bis Donnerstag 19. Januar 14.00 Uhr in die entsprechend gekennzeichneten Briefkästen auf F4.